Fiche de cours — 3ème technique

DERIVABILITES

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$

Le réel ℓ *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il noté* $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une tangente T d'équation :* $y = f'(a)\ (x-a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$ *. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+a^2+ax)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+a^2+ax)=3a^2$$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a)=3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :]a-h , a] (h >0)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell'$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$

Le réel ℓ' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il noté* $f'_g(a)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : [a , h+a[(h>0)

On dit que f est dérivable à droite en x_0 *s'il existe un nombre réel* ℓ'' *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell''$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell''$

Le réel ℓ'' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il noté* $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a)=f'_d(a)$ *nombre fini*

2°)Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_d *d'équation :* $T_d : y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x \ge a$

3°)Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_g *d'équation :* $T_g : y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x \le a$

Interprétation graphiques : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ *ou encore* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$

Si :	***Interprétation graphique :***
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : x = a et y ≥ f(a)*
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	*alors* C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : x = a et y ≤ f(a)*

Exemple :

Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse x = 0 et interpréter la résultat tel que : $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

alors la courbe alors C_f admet en point $M(0,0)$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = 0$ et $y \geq 0$

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .
Si f est dérivable en a, alors : $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$
On dit que $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h voisin de zéro.

Exemple :

Trouver une valeur approchée de $(3.98)^3$

Soit $f : x \mapsto x^3$, $a = 4$ et $h = -0.02$ alors $f(4-0.02)\approx f(4)-\frac{2f'(4)}{100}$ alors $(3.98)^3 \approx 63{,}04$

(le calculatrice donne : 63,044792)

Les nombres dérivés de fonctions usuelles

f	$f'(x)$
$f : x \mapsto \beta$	$f'(x)=0, \quad x\in R$
$f : x \mapsto \alpha x+\beta$	$f'(x)=x, \quad x\in R$
$f : x \mapsto (x-\alpha)^2+\beta$	$f'(x)=2(x-\alpha) \quad x\in R$
$f : x \mapsto \frac{1}{\alpha x+\beta}$	$f'(x)=-\frac{\alpha}{(\alpha x+\beta)^2}, \quad x\neq -\frac{\beta}{\alpha}$
$f : x \mapsto \sqrt{x+\alpha}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\alpha}}, \quad x>-\alpha$
$f : x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\gamma}$	$f'(x)=\frac{\alpha\gamma-\lambda\beta}{(\lambda x+\gamma)^2}, \quad x\neq -\frac{\gamma}{\lambda}$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables en x :

$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$
$(f^k)'(x)=kf'(x)f^{k-1}(x), k\in N^*$
$\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}, \quad f(x)\neq 0$
$\left(\frac{g}{f}\right)'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(a))^2}, \quad f(x)\neq 0$
$(\sqrt{f})'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad f(x)>0$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

Opération sur les fonctions dérivées

Soit f et g deux fonctions dérivable sur un intervalle I, α et β deux réels.

**)Les fonction $f+g$, fg , $\alpha f+\beta g$ sont dérivables sur I et on a : $(f+g)'=f'+g'$, $fg'=f'g+g'f$ et $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$.*

**)Pour tout entier $n\geq 2$, la fonction f^n est dérivable sur I et on a : $(f^n)'=nf'f^{n-1}$*

**) Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ et $\frac{1}{g^n}$,$n\in N^*$ sont dérivables sur I et on a $\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$, $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$ et $\left(\frac{1}{g^n}\right)'=-\frac{kg'}{g^{n+1}}$*

**)Si f est strictement positive sur I, alors le fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$*

*)Soit a et b deux réel. Si $ax+b \in I$ alors la fonction : $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I et on a :

$\left(f(ax+b)\right)' = af(ax+b)$

Sens de variation

*)La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$

*)La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$

*)La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$

Extremum local - Extremum absolu

Soit $x_0 \in I$

*)On dit que f admet maximum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$; $f(x) \leq f(x_0)$.

*)On dit que f admet minimum local en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$; $f(x) \geq f(x_0)$

*)On dit que f admet maximum absolu en x_0 si et seulement si pour tout $x \in I$; $f(x) \leq f(x_0)$

*)On dit que f admet minimum absolu en x_0 si et seulement si pour tout $x \in I$; $f(x) \geq f(x_0)$

*)Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

*)Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0.