Article n°1

Sommation par paquets & Sommation d'ABEL

AKIR ALI

Source disponible sur : http://maths-akir.midiblogs.com/

1- Sommation par paquets

Soit φ la suite définie par : $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$

On a alors :

- Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\varphi(n) \geq n$.
- On pose $v_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$ alors : $\sum_{k=0}^{\varphi(n)} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k$

Démonstration

- Par récurrence :

Soit la propriété $\wp$: « pour tout n de $\mathbb{N}$: $\varphi(n) \geq n$ »

La propriété $\wp$ est vraie pour n = 0, $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ alors $\varphi(0) \geq 0$

Soit p un entier naturel.

Supposons la propriété $\wp$ est vraie pour l'entier p et démontrons qu'elle est vraie pour l'entier (p+1).

C'est-à-dire : montrons que : $\varphi(p+1) \geq p+1$

On a $\varphi(p+1) > \varphi(p) \geq p$ alors $\varphi(p+1) > p$ or $\varphi(p) \in \mathbb{N}$ alors $\varphi(p+1) \geq p+1$

Et par suite la propriété $\wp$ est vraie pour l'entier (p+1).

Il en résulte, d'après le principe du raisonnement par récurrence, que la propriété $\wp$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

- $\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k + \sum_{k=\varphi(0)+1}^{\varphi(1)} u_k + \ldots + \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$

2- Sommation d'ABEL

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Alors pour tout n de $\mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = b_{n+1} s_n - \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) s_k$

Démonstration

On a : $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k = s_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=0}^{n} s_k b_{k+1} + b_{n+1} s_n$

Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = b_{n+1} s_n - \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) s_k$.

3- Exercices

1- Calculer en fonction de n : $T_n = 1 + 2\times 2^1 + \ldots + n\times 2^n$

2- $\sum_{k=0}^{2018}\left[\frac{k}{3}\right]$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x.

3- $\sum_{k=0}^{n^2}\left[\sqrt{k}\right]$, où $[x]$ est la partie entière du nombre réel x

4- Sachant pour tout réel x on a : $(1+2x+3x^2)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_{2n}x^{2n}$ avec n est un entier naturel.

Calculer $\sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k} a_i$

4- Correction

Article prochaine

Avec le soutien de