Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ *tel que :* $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ *ou encore* $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$

Le réel ℓ *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il noté* $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une tangente T d'équation :* $y = f'(a)\ (x-a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$ *. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+a^2+ax)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+a^2+ax)=3a^2$$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a)=3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :]a-h , a] (h >0)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' *tel que :* $\lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell'$ *ou encore* $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$

Le réel ℓ' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il noté* $f'_g(a)$.

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : [a , h+a[(h>0)

On dit que f est dérivable à droite en x_0 *s'il existe un nombre réel* ℓ'' *tel que :* $\lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell''$ *ou encore* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell''$

Le réel ℓ'' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il noté* $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a)=f'_d(a)$ *nombre fini*

2°)Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_d *d'équation :* $T_d : y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x\ge a$

3°)Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_g *d'équation :* $T_g : y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x\le a$

Interprétation graphiques : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ *ou encore* $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$

Si :	***Interprétation graphique*** *:*
$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation :* $x=a$ *et* $y\ge f(a)$
$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	*alors* C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation :* $x=a$ *et* $y\le f(a)$

Exemple :

Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse x = 0 et interpréter la résultat tel que : $f(x)=\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

alors la courbe alors C_f admet en point $M(0,0)$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = 0$ et $y \geq 0$

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

Si f est dérivable en a, alors : $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$

On dit que $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h voisin de zéro.

Exemple :

Trouver une valeur approchée de $(3.98)^3$

Soit $f : x \mapsto x^3$, $a = 4$ et $h = -0.02$ alors $f(4-0.02)\approx f(4)-\frac{2f'(4)}{100}$ alors $(3.98)^3 \approx 63{,}04$

(le calculatrice donne : 63,044792)

Les nombres dérivés de fonctions usuelles

f	$f'(a)$
$f : x \mapsto \beta$	$f'(a)=0,\quad a\in R$
$f : x \mapsto \alpha x+\beta$	$f'(a)=\alpha,\quad a\in R$
$f : x \mapsto (x-\alpha)^2+\beta$	$f'(a)=2(a-\alpha)\quad a\in R$
$f : x \mapsto \frac{1}{\alpha x+\beta}$	$f'(a)=-\frac{\alpha}{(\alpha a+\beta)^2},\quad a\neq-\frac{\beta}{\alpha}$
$f : x \mapsto \sqrt{x+\alpha}$	$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a+\alpha}},\quad a>-\alpha$
$f : x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\gamma}$	$f'(a)=\frac{\alpha\gamma-\lambda\beta}{(\lambda x+\gamma)^2},\quad a\neq-\frac{\gamma}{\lambda}$

Opérations sur les fonctions dérivables en a

Soit f et g deux fonctions dérivables en a :

$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$
$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$
$(\alpha f+\beta g)'(a)=\alpha f'(a)+\beta g'(a)$
$(f^k)'(a)=kf'(a)f^{k-1}(a),k\in N^*$
$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{(f(a))^2},\quad f(a)\neq 0$
$\left(\frac{g}{f}\right)'(a)=\frac{g'(a)f(a)-g(a)f'(a)}{(f(a))^2},\quad f(a)\neq 0$
$(\sqrt{f})'(a)=\frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}},\quad f(a)>0$