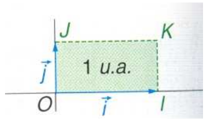
Notion d'intégrale d'une fonction

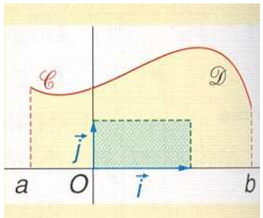
Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on définit les points I, Jet K par $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et OIKJ rectangle.
L'aire du rectangle OIKJ définit alors l'unité d'aire (u.a.).



Aire et intégrale d'une fonction positive

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et C sa courbe représentative dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$)

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$, égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.

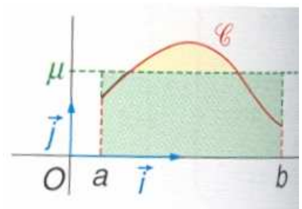


Remarque
a et b sont les bornes de l'intégrale et x est une variable muette :
elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par les lettres t ou u, ainsi : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

Valeur moyenne

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec a < b. La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est donc le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et b - a soit de même aire que le domaine D délimité par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b



- *Soit F une primitive quelconque de f sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$*

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Linéarité
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel.
Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad et \qquad \int_a^b (k.f)(x)dx = k \times \int_a^b f(x)dx$$

Intégrales et inégalités

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de , et a, b deux réels appartenant à I.

Si $a \le b$ et $f \ge 0$ sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.	Si $a \le b$ et $f \le 0$ sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$.
Si $a \ge b$ et $f \ge 0$ sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$.	Si $a \ge b$ et $f \le 0$ sur l'intervalle I, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Conservation de l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur [a ; b]. Si $f \le g$ sur [a ; b], c'est-à-dire si, pour tout réel x de [a ; b], $f(x) \le g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.

- *Si $a \le b$ et s'il existe deux réels m et M tels que $m \le f(x) \le M$, pour tout réel x de [a ; b]*

alors $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

- *S'il existe un réel M positif tel que $|f| \le M$ sur I, alors* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M\,|b-a|$

Intégration par parties

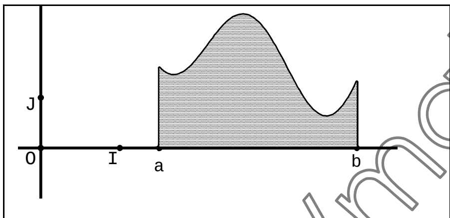
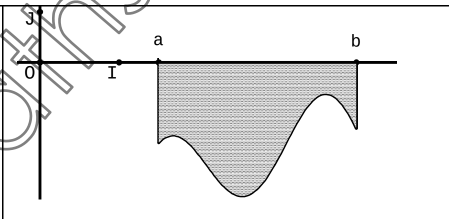
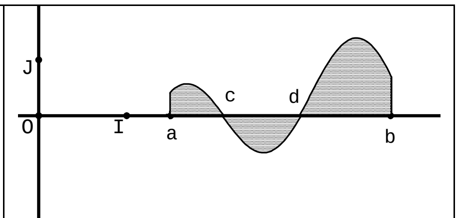
Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$

Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues, a et b deux réels de I tels que $a \le b$.

l'aire en u.a. du domaine limité par les courbes C_f et C_g sur [a, b] est le réel $\int_a^b |g(t)-f(t)|dt$

		
$A = \int_a^b f(x)dx$	$A = -\int_a^b f(x)dx$	$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$