

EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{2 \sin x \cos 2x - \sin 2x},$$

EXERCICE N°2

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\cos 3x + 1}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos(x) - 1}{4 \sin^2(x) - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos^2 x}{\sin x + \cos^2 x - 1}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \tan x.$$

EXERCICE N°3

On donne les fonctions définies sur $[-\pi, \pi]$: $h(x) = x \cdot \cos(x) - \sin(x)$ et $g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \neq 0 \\ x & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1°) Etudier les variations de h sur $[-\pi, \pi]$.

2°) En déduire le signe de $h(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

3°) Montrer que g est continue en 0.

4°) En admettant que $g'(0) = 0$. Donner les variations de g sur $[-\pi, \pi]$.

5°) Calculer : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\pi \sin x - 3x}{6x^2 - \pi x}$.

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x$.

On note (ζ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Montrer que pour tout réel x , on $f(x) = (1 + \cos x)(1 + \sin x)$.

2°) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie de (ζ) .

3°) Montrer qu'on peut étudier f sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$.

4°) Montrer que, pour tout réel x , on a : $f'(x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 1)$.

5°) Dresser la tableau des variations de f sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$.

6°) Tracer (ζ) .

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos 2x}{(1 + \sin 2x)^2}$, On note (ζ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté

à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) a- Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de (ζ) .

b- En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.

3°) a- Montrer que pour tout $x \in D_E$, $f'(x) = \frac{-2 \cos x \cdot (1 + 2 \sin x)}{(1 + \sin x)^3}$.

b- Dresser la tableau de variation de la restriction f à D_E .

4°) a- Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.



b-Tracer la partie de (ζ) relative à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

5°) Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) + 1$. On désigne par (ζ') la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que (ζ') est l'image de (ζ) par une translation dont on précisera le vecteur.

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{6})$, On note (ζ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a) Donner la période de f .

b) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{7\pi}{6}$ est axe de symétrie de (ζ) .

c) Déterminer le point d'inflexion I de (ζ) dont est un élément de $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (ζ) en I .

e) Montrer que I est un centre de symétrie de (ζ) .

2°) Dresser le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Puis construire (ζ) .

3°) Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par :
$$g(x) = \begin{cases} \frac{2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1}{2 \left(2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1\right)} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g en point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer qu'il existe une constante réelle a que l'on déterminera telle que pour tout x de $[0, \pi]$, $g(x) = f(x) + a$.

c) Construire la courbe représentative de g dans le même repère.

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = \frac{4 \cos^2 2x}{2 \cos 2x - 1}$. On note (ζ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de (ζ) .

3°) a- Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{8 \sin 4x \cdot (1 - \cos 2x)}{(2 \cos 2x - 1)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cap D_f$.

4°) a- Construire la courbe (ζ') de la restriction de f à $[0, \pi] \cap D_f$.

b- Expliquer comment (ζ) déduit de (ζ') .

5°) Soit l'équation $E : 3 \cos^2(2x) - 2k \cdot \cos(2x) + k = 0$; $k \in R$. Utiliser (ζ') pour déterminer les valeurs de k , pour lesquelles l'équation E admette 4 solutions distincts dans $[0, \pi]$.

