SERIES D'EXERCICE N°1
ENSEMBLE – APPLICATION – RELATION

EXERCICE 01

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que :

1°) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

2°) $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow B = C$

3°) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

4°) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

EXERCICE 02

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, On note $\varphi_A : E \to \{0,1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$.

La fonction caractéristique de A.

Montrer les formules suivantes, pour toutes parties A, B de E :

1°) $A \subset B \Leftrightarrow \varphi_A \le \varphi_B$

2°) $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$

3°) $\varphi_A{}^2 = \varphi_A$

4°) $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A . \varphi_B$

5°) $\varphi_{\overline{A}} = 1 - \varphi_A$

6°) $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$

7°) $\varphi_{A-B} = \varphi_A (1 - \varphi_B)$

8°) $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_B)^2 = |\varphi_A - \varphi_B|$.

EXERCICE 03(COURS)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que :

1°)Si f injective et g injective alors $g \circ f$ est injective.

2°) Si f surjective et g surjective alors $g \circ f$ est surjective.

3°) Si f bijective et g bijective alors $g \circ f$ est bijective.

4°)Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

5°)Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

6°)Si f est bijective alors f^{-1} est bijective.

7°)Si f et g sont bijectives alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

8°)f est bijective $\Leftrightarrow$ il existe une application $h : F \to E$ telle que $h \circ f = id_E$ et $f \circ h = id_F$.

EXERCICE 04

Soient E, F et G trois ensembles : $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On considère : $h : E \to F \times G$ définie par : $\forall x \in E, h(x) = (f(x), g(x))$.

1°)Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.

2°)On suppose que f et g sont surjective, h est-elle toujours surjective ?

EXERCICE 05

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.

EXERCICE 06(COURS)

Soient E et F deux ensemble , $f : E \to F$ une application. Soient $A, B \in \wp(E)$ et $A', B' \in \wp(F)$.

Montrer que :

1°) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2°) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3°) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4°) $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

5°) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

6°) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

7°) $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$

8°) $A \subset f^{-1}(f(A))$ 9°) $f\left(f^{-1}(A')\right) \subset A'$

EXERCICE 07

Soit $f : E \to F$ *une application. Montrer que :*

1°)*f est injective* $\Leftrightarrow \forall A \in \wp(E),\ f^{-1}(f(A)) = A$

2°) *f est surjective* $\Leftrightarrow \forall A' \in \wp(F),\ f\left(f^{-1}(A')\right) = A'$.

3°) *f est injective* $\Leftrightarrow \forall A,B \in \wp(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

4°) *f est bijective* $\Leftrightarrow \forall A \in \wp(E),\ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$

EXERCICE 08

Soit E un ensemble non vide et soient $A,B \in \wp(E)$.*Soit l'application :* $f : \begin{cases} \wp(E) \to \wp(A) \times \wp(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{cases}$

1°)*Montrer que : f est injective* $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

2°)*Montrer que : f est surjective* $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

3°)*Préciser le cas où f est bijective et déterminer* f^{-1} *dans ce cas.*

EXERCICE 09

Soit f de Z dans N définie par $f(n) = \begin{cases} 2n & si \quad n \geq 0 \\ -2n-1 & si \quad n < 0 \end{cases}$

Montrer que f est bijective et déterminer la bijection réciproque de f .

EXERCICE 10

Soit f une application surjective de E vers F. Soit $(B_i)_{i \in I}$ *une partition de F.*

Montrer que la famille $\left(f^{-1}(B_i)\right)_{i \in I}$ *est une partition de E.*

EXERCICE 11

On considère dans l'ensemble des réels la relation R définie par : $a,b \in R$, $a \Re b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$

1°)*Montrer que* $\Re$ *est une relation d'équivalence sur R.*

2°)*Discuter suivant a le nombre d'éléments de la classe de a.*

EXERCICE 12

On définit une relation binaire < sur $\{z \in C \ / \ Im(z) \geq 0\}$ *par :* $z < z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| < |z'| \\ ou \\ |z| = |z'| \quad et \quad Re(z) \leq Re(z') \end{cases}$.

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

EXERCICE 13

Soit R la relation, définie sur N² par : $(x,y) \Re (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \quad et \quad y \leq y'$

1°)*Montrer que* $\Re$ *est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?*

2°)*Soient* $A = \{(1,1),(2,3),(2,4),(4,5),(5,2)\}$ *et* $B = \{(2,1),(1,3),(5,2),(1,5),(5,6)\}$.

Quels sont les majorants, minorants et,s'il y a lieu, borne supérieure, borne inférieure, plus grand et plus petit élément de A et B

EXERCICE 14

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation dans E. On définie un relation S dans E par :

$$xSy \Leftrightarrow \left[\exists n \in N^* \quad et \quad x_0, x_1, ..., x_n \ / \quad \begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!], & x_i \Re x_{i+1} \\ x_0 = x \quad et & x_n = y \end{cases} \right].$$

1°)Montrer que S est transitive.
2°)Montrer que si $\Re$ réflexive et symétrique alors S est une relation d'équivalence .

EXERCICE 15

Soient E un ensemble non vide et F une partie donnée de E.
On considère la relation $\Re$ définie sur $\wp(E)$ par : $A \Re B \Leftrightarrow A \cap F = B \cap F$.
1°)Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2°)Préciser la classe d'équivalence ψ de et celle de F.
3°)Montrer que toute classe a un représentant unique inclus dans F.
4°)En déduire qu'il existe une bijection de $\wp(F)$ sur l'ensemble quotient E/R.
5°)Soit maintenant la relation d'équivalence S, définie sur $\wp(E)$, dont les deux seuls classes $\{\emptyset, E\}$ et $\wp(E) - \{\emptyset, E\}$.
Existe-t-il une partie F de E telle que S soit identique à la relation $\Re$ définie ci-dessus ?.