SEMAINE DES SUITES REELLES

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

Exercice n°5

1. *Soit la fonction f définie sur* $[1,3]$ *par:* $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$

   Montrer que si : $x\in[1,3]$ *alors* $f(x)\in[1,3]$

2. *Soient les deux suites réelles V et W définie par :* $V_0=1$, $W_0=3$ *et pour tout n de N,* $V_{n+1}=f(V_n)$ *et* $W_{n+1}=f(W_n)$.

   a. *Montrer que pour tout n de N,* $V_n\in[1,3]$ *et* $W_n\in[1,3]$.

   b. *Etudier la monotonie de V et W.*

   c. *Montrer que V et W sont convergentes et calculer leurs limites.*

3. *On considère la suite U définie par* $U_0=1$, $U_1=3$ *et* $\forall n\in N :$ $U_{n+2}=U_{n+1}+\dfrac{2}{U_{n+1}}-\dfrac{2}{U_n}$

   a. *Etabli que pour tout n de N,* $U_{n+1}=\dfrac{2}{U_n}+1$.

   b. *Vérifier que pour tout n de N,* $V_n=U_{2n}$ *et* $W_n=U_{2n+1}$

   c. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Correction d'exercice n°5

1. *Il suffit de démontrer que f est croissante,* $f'(x)=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0$

Pour tout $x\in[1,3]$ *on a* $f(x)\in[f(1),f(3)]=\left[\dfrac{5}{3},\dfrac{11}{3}\right]\subset[1,3]$.

2.

a- *Raisonnement par récurrence (utiliser que* $x\in[1,3]$ *alors* $f(x)\in[1,3]$)

b- *Raisonnement par récurrence (utiliser que f est croissante)*

c- $f(\ell)=\ell$ *et* $\ell\in[1,3]\to\ell_v=\ell_w=2$

3.

a- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}U_{k+2}-U_{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{U_{k+1}}-\frac{2}{U_k}\to\ldots\to U_{n+1}=\frac{2}{U_n}+1$

b- *Soit* $g(x)=\dfrac{2}{x}+1$, *vérifier que* $g\circ g(x)=f(x)$ *et conclure.*

c- $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=2$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}U_{2n+1}=2$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=2$