atomath

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES
1997-2012

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

ATSM

Regroupé par : AKIR ALI

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 1997-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

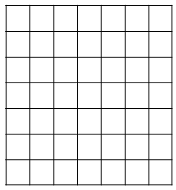
Soient x , y , α , β , des réels tels que : $x^2\sin\alpha.\sin\beta + y^2\cos\alpha.\cos\beta = 0$.

Démontrer que :

$$x^2(\sin\beta-\sin\alpha)^2 + y^2(\cos\beta-\cos\alpha)^2 = (x^2+y^2)\sin^2(\beta-\alpha)$$

Exercice n°2

Un carré de coté n est divisé en n^2 carrés.
Soit R(n) le nombre de rectangles (y compris les carrés) dont les sommets appartiennent aux points de subdivision de la grille obtenue.
On désigne par C(n) le nombre de carré.

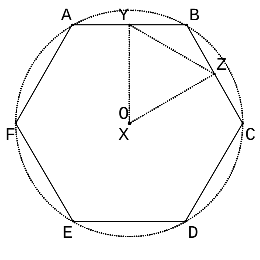


1°)Déterminer R(n) et montrer que R(n) = $1^3+2^3+...+n^3$

2°)Montrer que : C(n) = $1^2 + 2^2 + ...+n^2$

Exercice n°3

Soit ABCDEF un hexagone régulier inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.
Un triangle XYZ isométrique au triangle OAB est placé initialement de telle sorte que X , Y , Z coïncident respectivement avec les points O , A , B.
Le triangle XYZ se déplace de façon à ce que les points Y et Z se trouvent sur les cotés de l'hexagone et que X reste à l'intérieur de celui-ci.



1°) Montrer que lorsque Y appartient à [AB] et Z appartient à [BC] alors Y , B , Z , X sont cocycliques et que O , B , X sont alignés.

2°)Déterminer l'ensemble décrit par X lorsque Y parcourt entièrement le bord de l'hexagone.

Exercice n°4

Soit ABCD un tétraèdre tel que (AB) $\perp$ (CD) et (BC) $\perp$ (AD).
1°) Montrer que (AC) $\perp$ (BD).

2°) On appelle hauteur du tétraèdre toute droite passant par un sommet et perpendiculaire à la face opposée. Démontrer que les quatre hauteurs sont concourantes.

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

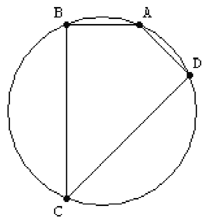
CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 1998-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Soit ABCD un quadrilatère convexe dont les sommets A , B , C , D sont cocycliques.



Démontrer la relation : AB.CD + BC.AD = AC.BD

(On rappelle que dans tout triangle ABC on a : $\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{CA}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} = 2R$ où R est le rayon du cercle circonscrit à ce triangle)

Exercice n°2

On définit la suite de la fonctions f_n par :

$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}$ et pour tout $n \geq 1$: $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2+6f_n(x)}$.

Pour tout $n \geq 1$ on pose $g_n(x) = f_n(x) - 2x$

1°)Démontrer par récurrence que $g_n(4) = 0$

2°)Déterminer le signe de $g_n(x)$ pour x < 4 et pour x > 4 et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $g_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice n°3

1°) Démontrer la relation : $\sum_{k=1}^{n} k^2(2n+1-k) = \frac{1}{6}C_{n+1}^{2}(5n^2+5n+2)$

2°) On pose : $(x+2x^2+3x^3+......+nx^n)^2 = a_2x^2+a_3x^3+.....+a_{2n}x^{2n}$.

Calculer $a_{n+1}+a_{n+2}+....+a_{2n}$

Exercice n°4

Soit ABCD un quadrilatère quelconque d'un plan P et S un point n'appartenant à P.

Un plan variable Q ne passant pas par S coupe les droites (SA) , (SB) , (SC) , (SD) en A',B',C',D' .

Démontrer que l'on peut choisir Q de telle façon que le quadrilatère A'B'C'D' soit :

1°) Un parallélogramme.

2°) Un losange.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 1999-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Soient x , y , z trois réels positifs vérifiant : $x+y+z=\pi$.

Démontrer que :

$$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z\leq\frac{9}{4}$$

Dans quel cas l'égalité a-t-elle lieu ?

Exercice n°2

On pose pour x réel : $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n$ où $a_0,a_1,.........,a_n$ sont des réels vérifiant : $0\leq a_i\leq a_0$ pour $i\in\{1,2,....,n\}$.

Soient $b_0,b_1,.........,b_{2n}$ tels que : $(f(x))^2=b_0+b_1x+....+b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}+.....+b_{2n}x^{2n}$.

Montrer que :

$$b_{n+1}\leq\frac{1}{2}[f(1)]^2.$$

Exercice n°3

On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 0$, $U_1= 1$ et pour tout $n\geq 2$: $U_n=aU_{n-1}-U_{n-2}$ où a est un réel donné.

1°)Déterminer U_n en fonction de n dans les cas suivantes : $|a| = 2$, $|a| =1$.

2°)On suppose $|a|^2>4$; on pose $\alpha=\sqrt{a^2-4}$, $\beta=\frac{a+\alpha}{2}$.

Démontrer que pour tout $n\geq 1$:

$$U_n=\frac{1}{\alpha}\left[\beta^n-\frac{1}{\beta^n}\right].$$

Exercice n°4

On donne :

i- un cercle Γ de centre ω et de rayon r .

ii- une droite Δ extérieure à Γ.

On désigne par D la perpendiculaire issue de ω à la droite Δ .

Un cercle variable C tangent à Γ et centré en un point I de Δ coupe Δ en M et N.

1°) Soit C' le cercle symétrique de C par rapport à D coupant la droite Δ en M' et N'.

Démontrer que si un point A vérifie $M'\hat{A}N'=M\hat{A}N$ alors A appartient nécessairement à D .
(On pourra montrer d'abord que les cercles circonscrits aux triangles (AMN) et (AM'N') sont isométriques.)

2°)Démontrer qu'il existe au moins un point A du plan tel que $M\hat{A}N$ soit constante lorsque C varie .
(On pourra calculer $\tan M\hat{A}N$).

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

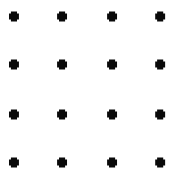
CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 2000-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

On considère un ensemble E de 16 points placés sur un carré comme l'indique
la figure ci-contre .



Combien de parties de 5 points de E peut-on former de telle façon que quatre des 5 points ne soient pas alignés ?

Exercice n°2

Montrer que si a , b , c sont trois nombres rationnels distincts alors le nombre :

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

est le carré d'un nombre rationnel.

Exercice n°3

1°)Démontrer que :

$$\frac{2n+1}{2k+1}C_n^k = C_n^k + \frac{2n}{2k+1}C_{n-1}^k \quad \text{et} \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots\ldots + (-1)^n C_n^n = 0$$

2°) Démontrer que pour $n \geq 1$:

$$1-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\ldots.+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n=\frac{n!2^n}{1\times3\times5\times7\times\ldots\times(2n+1)}$$

Exercice n°4

On considère deux triangles rectangles et isocèles de sens direct (ABC) et (AEF).

On désigne par I le milieu [EC].

Démontrer que les droites (AI) et (BF) sont perpendiculaires.

Exercice n°5

Soit f une fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

1°)Quel est le domaine de définition de la fonction : $x \mapsto f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$.

2°)On suppose que pour tout réel x différent de 1 et de –1 on ait :

$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$. Démontrer que f est définie par : $f(x) = \frac{4x}{1-x^2}-\frac{x}{2}$

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 2001-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la courbe représentative ζ de la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2$ où a est un réel donné non nul.

Démontrer qu'il existe un point T de l'axe de ordonnées et une droite Δ parallèle à l'axe des abscisses tels que : Pour tout point M de ζ, MT = MH où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

Exercice n°2

On désigne par a , b , c les longueurs respectives des cotes [BC] , [CA] , [AB] d'un triangle ABC et par A , B , C les mesures en radians des angles $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ de ce triangle.

Montrer que si : $a + b = (a\tan A + b\tan B)\tan\frac{C}{2}$ alors le triangle ABC est isocèle.

Exercice n°3

On désigne par I le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC. La droite (AI) recoupe le cercle circonscrit en D. Soient E et F les projetés orthogonaux de I sur (BD) et (DC) respectivement.

1°)Démontrer que DB = DC = DI.

2°) On suppose que $AD = 2(IE + IF)$. Montrer alors que $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$.

Exercice n°4

On pose $t_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ où n est un entier positif ou nul.

1°) Montrer que t_n est un nombre entier pour tout n.

2°)Démontrer la relation : $t_{n+1} = 2(t_n + t_{n-1})$ pour tout n $\geq$ 1.

3°)Démontrer que pour tout n : $\frac{t_n}{2^{k_n}}$ est un entier, où $k_n = E\left(\frac{n+2}{2}\right)$

On rappelle que pour tout réel x, E(x) est la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égale à x .

4°)Démontrer que pour tout n : $\frac{2^{n+1} + t_{2n+1}}{2^{n+2}}$ est un entier

NB :On pourra pour les questions 2 et 4 raisonner par récurrence .

atomath

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 2002-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Soit (ABC) un triangle de sens direct. Soient les points M , N , P à l'extérieur de ce triangle tels que les triangles (MCB) , (NAC) , (PBA) soient des triangles isocèles et de sens directs avec :

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

On désigne par R l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (BC).

Démontrer que le quadrilatère (PRNA) est un parallélogramme et en déduire que les triangles (ABC) et (MNP) on le même centre de gravité.

Exercice n°2

1°) Trouver tous les entiers relatifs x vérifiant : $\left|\dfrac{4x}{x^2-2x-1}\right| \geq 1$.

2°) En déduire tous les couples (x,y)d'entiers relatifs vérifiant:

$$1+x^2y=x^2+2xy+2x+y$$

Exercice n°3

Soit (ABCD) un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que AB = 1.

On désigne par r la rotation de centre A telle que r(D) = B .

Soit M un point variable sur [BC] et N un point variable sur [CD] tels que : MC + CN + NM = 2.

1°) Construire le point r(N).

2°)Déterminer $\widehat{MAN}$.

3°) Soit P le point de [MN] tel que (AP) $\perp$ (MN) ; quel est l'ensemble des points P lorsque M et N varient ?

Exercice n°4

On pose $I=\left]-1,+\infty\right[$; soit $f : I \to I$ une fonction vérifiant les deux propriétés :

$\wp_1$ et $\wp_2$ suivantes :

$\wp_1$: $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ quels que soient les réels x et y appartenant à I .

$\wp_2$: La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est strictement croissante sur les intervalles $\left]-1,0\right[$ et $\left]0,+\infty\right[$.

1°)Démontrer qu'il n'existe aucun réel $t\in\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ tel que f(t) = t.

(On pourra raisonner par l'absurde)

2°) En déduire que f(0) = 0 et que f est nécessairement la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-x}{1+x}$

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

atomath

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 2003-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Déterminer le plus grande valeur pour chacun des réels x , y , z , satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ xy+yz+zx=12 \end{cases}$$

Exercice n°2

On désigne par a , b , c les longueurs respectives des cotes [BC] , [CA] , [AB] d'un triangle (ABC) et par α , β , γ les mesures en radians des angles $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ de ce triangle.

Montrer que si : $c^2 = b^2 + ab$ alors $\gamma = 2\beta$

Exercice n°3

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(n+m)+f(n-m)=n-m+1+\dfrac{f(2n)+f(2m)}{2} \end{cases}$$

Pour n et m deux entiers naturels tels que $n \geq m$.

1°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $f(2n) = 4f(n) - 2n - 3$

2°) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = f(n) - f(n-1)$.

Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

Calculer $\sum_{k=1}^{n} V_k$ .En déduire f(n) pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice n°4

Soit (ABC) un triangle équilatérale. Tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. D un point de [AB] et E un point de [AC] tels que AD = AE.

On construite les triangles équilatéraux (AEF) , (AGB) et (CDH) tels que :
$(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}) \equiv (\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CH}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1°) Montrer que les droites (EF) et (BG) passent par H.

2°) Montrer que les milieux respectifs I , J , K des segments [AF] , [EH] , [GD] sont les sommets d'un triangle équilatéral.

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 2004-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Démontrer que , pour tout entier naturel p avec $1 \le p \le n$:

$$C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}.$$

En déduire que :

$$\sum_{p=0}^{n} pC_n^p = n2^{n-1}.$$

Exercice n°2

Montrer que, quels soient les réels positifs a , b , c :

1°) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + ac + bc$.

2°) $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \ge a + b + c$. (avec a , b , c > 0)

Exercice n°3

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f\big(f(x) - y\big) = f(x^2 + y) - 4yf(x).$$

Exercice n°4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$12\sqrt{3} + \sin x + \tan x = \frac{12\sqrt{3}\cos^4(x/2)}{\cos x}$$

Exercice n°5

Sur le coté [AC] d'un triangle (ABC) et vers l'extérieur, on construit le losange (ACDE) tel que E est situé sur la demi-droite [BA).

Sur le coté [AB] et vers l'extérieur, on construit le losange (ABGF) tel que F est situé sur la demi-droite [CA).

La droite (BD) coupe [AC] en H et la droite (CG) coupe [AB] en I. La parallèle à (AB) menée par H et la parallèle à (AC) menée par I se coupent en K.

1°) Quelle est la nature du quadrilatère (AIKH) ?

2°) Montrer que K est situé sur [BC].

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

atomath

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2005-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

1°) Montrer que quel que soit l'entier naturel non nul k, on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

2°) On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Montrer que :

$$2\sqrt{n+1}-3 < S_n < 2\sqrt{n}-2.$$

Exercice n°2

Déterminer les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ d'un triangle (ABC) satisfaisant à la relation :

$$\cos\hat{A}\cos\hat{B}+\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}=1$$

Exercice n°3

Soit un triangle (ABC) dont aucun angle ne dépasse 120°.
On construire extérieurement à ce triangle, les triangles équilatéraux (ABD) , (BCE) et (ACF).

1°) Montrer que les droites (AE) , (BF) et (CD) sont concourantes en un point I .

2°) En déduire que :

$$IA + IB + IC = \frac{1}{2}(ID+IE+IF).$$

Exercice n°4

Trouver toutes les fonctions : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(x^2+f(y)) = (x-y)^2 f(x+y)$$

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2006-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Soit x, y et z des réels tel que : $xyz = 1$.

Calculer la valeur de l'expression :

$$\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$$

Exercice n°2

On désigne par E(x) la partie entière du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égale à x.

Trouver tous les réels positifs x vérifiant l'équation :

$$20[x-E(x)]+\frac{1}{2}E(x)=2006$$

Exercice n°3

Soit un quadrilatérale (ABCD) convexe inscriptible. On désigne par (Γ) le cercle de centre O et de rayon R, inscrit dans le quadrilatère (ABCD), tangent à (AB) en E et à (CD) en F.

Montrer que :

$$AE\times CF = BE\times DF$$

Exercice n°4

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vérifiant :

$$f(x)f(y)f(z)-f(xyz)=x+y+z \text{ , quels que soient les réels } x \text{ , } y \text{ et } z.$$

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2007-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Calculer $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$, sachant que a , b et c sont de réels tels que :

$$a + b + c = 9 \quad \text{et} \quad \frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\frac{4}{9}.$$

Exercice n°2

Soit x et y deux réels tels que : $\begin{cases} \sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{y}{2}\right)=1 \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{y}{2}\right)=-1 \end{cases}$

Montrer que :

$$\cos x=\cos y.$$

Exercice n°3

Trouver tous les entiers naturels a , b et c dont le plus petit commun multiple est 720, sachant que $pgcd(a,b)=pgcd(b,c)=pgcd(c,a)=12$ et que a , b et c sont les mesures des cotés d'un triangle .

Exercice n°4

On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle ξ de centre O.
On désigne par D le milieu de [AB] et G le centre de gravité du triangle ACD.

Prouver que les droites (CD) et OG sont perpendiculaires si et seulement si le triangle ABC est isocèle de sommet principale A.

Exercice n°5

Déterminer les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y, on a :

$$(x+y)(f(x)-f(y))=f(x^2)-f(y^2)$$

atomath

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2008-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

1°) Déterminer une fonction polynôme du second degré f tel que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{f(n)}{f(n-1)}$$

2°) On pose pour tout entier $n \geq 2$,

$$A_n = \frac{n^3-1}{n^3+1} \times \frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1} \times \frac{(n-2)^3-1}{(n-2)^3+1} \times \ldots \times \frac{2^3-1}{2^3+1}$$

Simplifier A_n et calculer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°2

Montrer que pour tout entier p premier et différent de 3 : $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$ est divisible par p.

Exercice n°3

Déterminer les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y : $f\left(x + f(y)\right) = f(x) + y$.

Exercice n°4

Dans le plan complexe, on donne des points distincts A , B , C d'affixes respectives a , b , 1+i.
On note Δ la médiatrice de [AB].

1°) Montrer que le point M d'affixe z appartient à Δ si et seulement si,

$$(b-a)\,\overline{z} + \overline{(b-a)}\,z = |b|^2 - |a|^2$$

2°) On suppose que $a = m + im^2$ et $b = -m^2 + im$ où m est un réel non nul.
Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (AC) et Δ quand m varie.

Exercice n°5

Sur un quadrilatère convexe ABCD inscrit dans un cercle, les droites (AB) et (CD) se coupent en E, les droites (BC) et (AD) se coupent en F. La bissectrice de l'angle $\widehat{BEC}$ coupe [AD] en P et [BC] en Q. La bissectrice de l'angle $\widehat{AFB}$ coupe [AB] en R et [CD] en S.
Démontrer que le quadrilatère PRQS est un losange.

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2009-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1°) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq n+2$

2°) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \ldots + \frac{1}{u_n - 1}, \ n \geq 1$$

Montrer que la suite (v_n) admet une limite finie que l'on calculera.

Exercice n°2

Soit la suite (w_n) définie sure $\mathbb{N}$ par :

$$w_0 = 1 \text{ et } w_{n+1} = w_n(w_n + 2) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer w_{2009}.

Exercice n°3

Soit ABC un triangle et M un point intérieur à ce triangle.
1°)Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
On pose

$$x = \frac{a+b}{c} \ , \ y = \frac{b+c}{a} \text{ et } z = \frac{c+a}{b}$$

Vérifier que $xyz = x + y + z + 2$

2°)Les droites (AM) , (BM) et (CM) coupent respectivement (BC) , (AC) et (AB) en A', B' et C'.
Montrer que :

$$\frac{MA}{MA'} \times \frac{MB}{MB'} \times \frac{MC}{MC'} = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} + 2$$

Exercice n°4

Montrer que l'équation (E) :

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x} + \ldots + \sqrt{1+2009x} = 2009$ admet au plus une solution réelle non nulle.

Exercice n°5

Trouver mes couples (x,y) d'entiers naturels vérifiant $y^2(x-y)^2 = (x+y)x^2$.

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

atomath

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2010-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

1°) Montrer que, pour tout réel x strictement positifs, $x+\frac{1}{x}\geq 2$

2°) Soient $x_0,x_1,x_2,...,x_n$ des réels positifs tels que $x_0<x_1<x_2<...<x_n$.
Montrer que :

$$x_n+\frac{1}{x_1-x_0}+\frac{1}{x_2-x_0}+\frac{1}{x_3-x_2}+...+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\geq 2n+x_0$$

Exercice n°2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que pour tout entier $n\geq 1$, $u_n^2-u_{n+1}\times u_{n-1}=1$.
Montrer qu'il existe un réel k tel que : pour tout entier $n\geq 1$, $u_{n+1}=ku_n-u_{n-1}$.

Exercice n°4

Dans un plan orienté, on considère un losange ABCD tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Soit M et N deux points respectivement des segments [BC] et [DC] tels que le centre O du cercle circonscrit au triangle AMN appartient au cercle circonscrit au triangle MCN.

1°) Montrer que les points O,A et C sont alignées.

2°)Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN})$.

Exercice n°3

Soit ABC un triangle tel que : AB =3, AC = 7 et BC = 8.

Montrer que les angles de ce triangle sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Exercice n°5

Montrer que si a,b et c sont trois réels tels que :

$abc=1$ et $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, alors l'un au moins de ces réels est égale à 1.

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

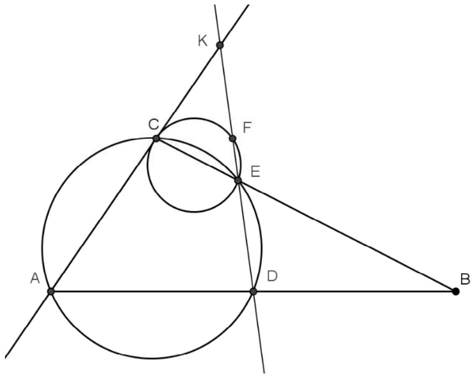
CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Avril 2011-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Un cercle passant par les sommets A et C d'un triangle ABC coupe [AB] en son milieu D et [BC] en un point E. Le cercle passant par E et tangent à la droite (AC) en C recoupe la droite (DE) en un point F. Soit K l'intersection de (AC) et (DE). (voir figure)



Montrer que les droites (CF), (AE) et (BK) sont concourantes.

Exercice n°2

Soit ABCD un carré de côté 1. On considère les points E, F, G et H respectivement sur les côtés [AB] , [BC] , [CD] et [DA] .

1°) Montrer que $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \leq 4$.

2°) a) Montrer que $AE^2 + EB^2 \geq \frac{1}{2}$.

b) En déduire que $EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \geq 2$

Exercice n°3

Trouver tous les nombres réels x tels que :

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{x - \frac{1}{x}}$$

Exercice n°4

Soit la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}$ où a est un paramètre réel.

Donner les valeurs de a telles que pour tout $x \in [0,1]$; $|f(x)| \leq 1$.

Exercice n°5

Soit E un ensemble de 17 entiers naturels : n_1 , n_2 , n_3 , …, n_{17} (distincts ou non).

Montrer qu'il existe une partie de E dont la somme de ses éléments est un multiple de 17.

(On pourra considérer les sommes $S_i = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_i$ avec $1 \leq i \leq 17$).

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION
***

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES

Mai 2012-Durée : 4 Heures

Exercice n°1

Soit a et b deux réels strictement positifs.
On considère l'ensemble : $M = \{ax + b(1-x) ; 0 < x < 1\}$.

Montrer que :

$$\frac{2ab}{a+b} \in M \text{ et que } \sqrt{ab} \in M$$

Exercice n°2

On désigne par E l'ensemble des suites réelles (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant :
Pour tout entier naturel n ;

$$u_{n+2} - 10u_{n+1} + u_n = 0 \ .$$

1) Déterminer toutes les suites géométriques de premier terme égal à 1 et appartenant à E.

2) Soit la suite (t_n) définie sur N par $t_n = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$.

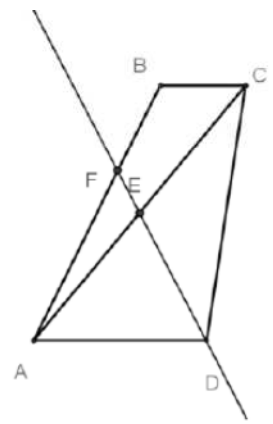
a) Montrer que (t_n) est un élément de E.

b) Pourquoi t_k est un multiple de 10 quand k est impair ?

Exercice n°3

Dans un trapèze ABCD d'aire égale à 1 , les bases [AD] et [BC] sont telles que AD = 2 BC. On désigne par E le milieu de [AC] et F le point d'intersection des droites (DE) et (AB).

Calculer l'aire du quadrilatère BCEF.



Exercice n°4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit p un entier premier tel que n divise $p-1$ et p divise $n^3 - 1$.

Prouver que :

$$4p-3 \text{ est un carré parfait.}$$

©AKIR Ali tél : (+216)24962430 E-mail : akir.cm@gmail.com

Page facebook : https://www.facebook.com/groups/1569868026651471/?fref=ts