Séries d'exercices — 3ème Maths
ETUDES DES FONCTIONS

EXERCICE N°1
Soit la fonction f définie sur R par $f(x) = x^2 - 4|x-1|$
1°)Dresser le tableau de variations de f.
2°) Tracer C_f *, courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $R=(O,\vec{i},\vec{j})$

EXERCICE N°2
Partie I :
On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par :
$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+4$*.On désigne par* (ζf) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan*
1°)Etudier les variations de f ; déterminer l'axe de symétrie ,étudiés les branche infinies .
2°)Trouver l'équation de droite D tangente à (ζf) *au point d'abscisse 3.*
3°)Etudier la position relative de (ζf) *et D.*
4°)Déterminer une équation de (ζf) *dans le repère* $(S,\vec{i},\vec{j})$ *où* $S(2,2)$
5°)Soit M le point de (ζf) *d'abscisse a ; soit P le projeté orthogonal de M sur la droite des ordonnées et Q le projeté orthogonal de M sur la droite des abscisses.*
Déterminer a pour que le quadrilatère OQMP soit un carré.
Montrer que dans ce cas le point M appartient à une droite particulière qu'on précisera.

Partie II:
m désigne un paramètre réel.
On considère la famille des fonctions f_m *définies sur R par* $f_m(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2mx+m(m+2)\right)$
On désigne par (ζf_m) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan .*
1°)Vérifier que la fonction f définie dans ***Partie I*** *est une fonction de la famille des fonctions* f_m*.*
2°)Dresser le tableau des variations de f_m*.*
3°) Exprimer en fonction de m les cordonnées de S_m *correspondant à l'extremum de* f_m
Donner une équation de l'ensemble (Σ) *des points* S_m *quand m varie dans R.*
4°)Montrer que la droite D obtenue dans ***Partie I*** *est tangente à toutes les courbes* (ζf_m)*.*
5°)a)Déterminer l'ensemble Δ *des points de* (ζf_m) *où la tangente est parallèle à la droite d'équation : y=-x.*
b)Que peut-on dire des ensembles (Σ) *,* Δ *et de la droite D.*
6°)a)Montrer que quelque soit le réel m et pour tout x dans R on a : $f_0(x-m)=f_m(x)-m$*.*
b)En déduire que (ζf_m) *est l'image de* (ζf_0) *par une transformation du plan qu'on déterminera.*
c)Construire sur le même repère les paraboles (ζf_0) *et* (ζf_1) *; la droite D et les ensembles* (Σ) *et* Δ*.*

EXERCICE N°3
On considère la fonction f_m *définie par* $f_m(x)=x^2-mx+m$ *où m est un paramètre réel et on désigne par* (ζf_m) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $R=(O,\vec{i},\vec{j})$
1°)Montrer que toutes les courbes C_m *passent par un point fixe A .*
2°) Exprimer en fonction de m les cordonnées de S_m *correspondant à l'extremum de* f_m
Quel est l'ensemble des point S_m *lorsque m varie dans R .*
Dans toute la suite on prend m=2
3°)a)Etudier f_2 *et construire* (ζf_2) *dans le repère R .*
b)Soit Δ *la droite d'équation : 3x+y-1=0 .Ecrire une équation de la tangente T à* (ζf_2) *parallèle à* Δ *.*
4°)Soit g la fonction définie par : $g(x)=x^2-4x$
a)Tracer (ζg) *, courbe représentative de g dans un repère orthonormé* $R=(O,\vec{i},\vec{j})$
b)Resoudre dans R l'équation $f_2(x)=g(x)$
6°)Soit $h(x) = x^2 - |2x-2|$*. Etudier h et tracer sa courbe .*

EXERCICE N°4
Soit la fonction : $f(x)=4x^3-3x+1$ *; On désigne par* (ζf) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $R=(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie I:
1°)Etudier f.

2°)Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (ζf)

3°)Ecrire l'équation de tangente D à la courbe (ζf)en point I.

4°)Etudier la position relatif de D et (ζf)

5°)Tracer (ζf)

6°)Soit l'équation (E_m) : $8x^3-6x+m=0$. Utiliser la courbe (ζf)pour déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet dans R , 3 solutions distincts deux à deux.

7°) Utiliser la courbe(ζf)pour pour construire la courbe (ζh)de la fonction $h(x)=-4|x|^3+3|x|+1$.

Partie II :

Soit la fonction $f_a(x)=\frac{4}{a^2}x^3-3x+a$.(avec a est un réel non nul).

1°)Etudier suivant les valeurs de a , les variations de f_a.

2°)Soit (ζf_a)la courbe de f_a. M_a et N_a les points de (ζf_a)correspondants aux extremums de f_a.

a)Déterminer en fonction de a les cordonnées de M_a et N_a.

b)Quel est l'ensemble des points M_a et des points N_a lorsque a décrits R^*.

Partie III: Soit la fonction : $g_m(x)=f_1(x)-mf_2(x)$ et (ζg_m)sa courbe.

1°) Etudier suivant m les variations de g_m.

2°)Montrer que toutes les courbes (ζg_m)passent par 2 points fixes A et B.(A d'abscisse positif)

EXERCICE N°5

Soit la fonction f_m définie par $f_m(x)=mx^3-x^2+(2-3m)x+2m$ où m est un paramètre réel et ζ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie I :

1°)Etudier le fonction f_0 et construire ζ_0.

2°)Soit $x_0\in\,]1,2]$ et T la tangente à ζ_0 au point d'abscisse x_0.

a)Ecrire une équation cartésienne de T.

b)Soit le point A(0,1). La droite T coupe la droite Δ : y=1 en B et l'axe des abscisses en C.

i)Montrer que l'aire de trapèze OABC est $S=\frac{2x_0^2-1}{4(x_0-1)}$

ii)Pour qu'elle valeur de x_0 , S est-elle minimal ?

Partie II:

1°)Etudier la fonction $f_{2/3}$ est construire $\zeta_{2/3}$

2°)a)Montrer que $f_{2/3}$ admet un point d'inflexion I que l'on déterminera.

b)Vérifier que I est un centre de symétrie pour $\zeta_{2/3}$.

3°)Montrer que ζ_0 et $\zeta_{2/3}$ se coupent en deux points E et F et préciser la position relative de ces deux courbes.

4°)Soit Δ_k la droite d'équation : $3y-3kx-4=0$.

Etudier suivant le réel k le nombre de points d'intersection de Δ_k et $\zeta_{2/3}$

Partie III:

1°)Montrer que toutes les courbes ζ_m passent par les deux points E et F.

2°)Discuter suivant le réel m le nombre de tangente à ζ_m parallèle à (EF).

3°)Etudier suivant m les variations de f_m

4°)Montrer que toutes les courbes ζ_m sont tangentes au point d'abscisse 1.

EXERCICE N°6

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x)=\frac{x^2+5x+m}{x}$ où m est un paramètre réel.

ζ_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°)Pour quelles valeurs de m, la fonction f_m est monotone dans les intervalles où elle est définie?

2°)Pour quelles valeurs de m, f_m admet-elle un maximum ou un minimum?

Calculer alors les cordonnées des sommets deζ_m et déterminer leurs ensembles lorsque m varie.

3°)Soit A_m le point où ζ_m rencontre la droite D dont une équation est x = 4 et T_m est la tangente à ζ_m en A_m.

a) Former une équation de T_m.

b) Montrer que T_m coupe la droite Δ dont une équation est y = x + 5 en un point fixe B que l'on déterminera.

EXERCICE N°7

Soit la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$

1°)Etudier la fonction f et construire ζ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé R=*$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2°)Soit D_m *la droite du plan d'équation y = 2x + m où m est un paramètre réel.*

a) *Montrer que pour tout* $m\in R$, ζ *et* D_m *se coupent en deux point M et N(sans calculer ses cordonnées)*

b) *Montrer que le produit scalaire* $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ *est constante lorsque m varie..*

3°)Soit le point A(1,2). Calculer en fonction de m le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}$.

En déduire m pour que le triangle MAN soit rectangle en A.

4°) Déterminer une équation de (ζf) *dans le repère* $\left(S,\vec{i},\vec{j}\right)$ *où* $S(-2,-1)$

EXERCICE N°8

On considère la fonction $f: x\rightarrow\sqrt{x^2-4x+3}$ *et on désigne par* ζ *sa courbe représentative dans un repère orthogonale* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°)Déterminer l'ensemble de définition de f .

2°)Etudier la dérivabilité de f à droite en 3 et à gauche en 1.

Interpréter graphiquement les résultats.

3°)Soit Δ *la droite d'équation x = 2. Montrer que* Δ *est axe de symétrie de* ζ .

4°)Etudier f .

5°)Calculer $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\left(f(x)-x+2\right)$ *et* $\lim\limits_{x\rightarrow-\infty}\left(f(x)+x-2\right)$. *Interpréter graphiquement les résultats.*

6°)Tracer ζ

7°)En déduire la représentation graphique de la fonction $g: x\mapsto f(|x|)$

8°)Soit la fonction g = - f . On désigne par ζ' *sa courbe représentative dans un repère orthogonale* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Tracer ζ' *dans le même repère .*

9°)Vérifier que $\zeta\cup\zeta'$ *à pour équation* $x^2-y^2-4x+3=0$.

10°)On considère les vecteurs $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ *et* $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}$ *et* $\Omega(2,0)$

a) *Déterminer une équation de* $\Gamma=\zeta\cup\zeta'$ *dans le repère* $\left(\Omega,\vec{u},\vec{v}\right)$

b) *Conclure.*

EXERCICE N°9

Partie A :

Soit fm la fonction définie par $fm: R\rightarrow R$, $x\mapsto\dfrac{x^2+2x+m^2+1}{mx+m}$ *; Où m est un paramètre réel non nul.*

On note Γm la courbe représentative de fm dans le plan rapporté à un repère orthonormé R=$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1°) a-Déterminer trois réels a , b et c tel que pour tout $x\neq-1$ *on a :* $fm(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.

b-En déduire une équation cartésienne de l'asymptote oblique Δ_m *de Γm.*

2°)Dresser le tableau de variation de fm suivant m .

3°)a-En déduire que pour tout réel non nul m , fm admet deux extremums dont on précisera la nature.

b- Exprimer en fonction de m les cordonnées des deux points correspondants de Γm et déterminer l'ensemble de ces points quand m varie sur R.*

Partie B :

Dans la suite on prend m=3 et on note $f=f_3$ *et* $\Gamma=\Gamma_3$.

1°)Etudier les variations de f .

2°)On considère le repère R'=$\left(\Omega,\vec{u},\vec{j}\right)$ *tel que* $\overrightarrow{O\Omega}=-\vec{i}$ *et* $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}$

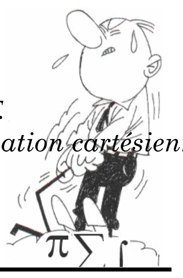
a-M étant un point de cordonnée (x , y) dans R et (X , Y) dans R'.

Montrer que x=3X-1 et y=X+Y.

b-Trouver alors une équation cartésienne de Γ dans le repère R' . En déduire la nature de Γ.

3°)a-Montrer que Γ admet deux tangentes T et T' de coefficient directeur (-1) et donner une équation cartésienne de chacune d'elles.

b-Tracer T , T' et Γ.



4°)Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$.

a-Montrer que Cg se déduit de Γ par une translation que l'on précisera.

b-Tracer dans Cg le repère R.

EXERCICE N°10

Partie A

Déterminer les réel a , b , c et d vérifiant :

♥La représentation graphique ζf de f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$ admet une asymptote d'équation x=2.

♥ζf n'admet pas d'asymptote horizontale.

♥ζf passe A(1 ,0) et en ce point la tangente à pour coefficient directeur -3

Partie B

On pose $g(x)=\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$.

1°)a-Dresser le tableau de variation de g.

b-Déterminer trois réels a' , b' et c' tel que pour tout x de D_g on a : $g(x) = a'x + b' + \dfrac{c'}{x-2}$.

c-En déduire une équation cartésienne de l'asymptote oblique Δ.

d-Tracer ζg dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°)a-Montrer que I(2,5)est un centre de symétrie de ζg.

b-Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de l'asymptote Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de l'asymptote parallèle à la droite des ordonnées .Donner une équation cartésienne de ζg dans le repère $R' = (I, \vec{u}, \vec{v})$

3°)Déterminer graphiquement , suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de :

$$\begin{cases} x^2 + (1-m)x - 2(1-m) = 0 \\ -2 \le x \le 4 \end{cases}$$

4°)Déduire se ζg la construction de ζh où $h(x) = \dfrac{x^2 + |x| - 2}{|x| - 2}$.

C)Soit m un réel non nul on considère les fonctions f_m définies par : $f_m(x)= \dfrac{x^2 + mx - 2}{mx - 2}$ On note (ζm) la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°)Montrer que toutes les courbes (ζm) passent par un seul point fixe A dont on donnera les cordonnées .

2°)Montrer que la droite Δ_m : $y = \dfrac{1}{m}x + 1 + \dfrac{2}{m^2}$ est une asymptote à (ζm).

3°)Etudier , suivant les valeur de m , les variations de f_m.

4°)a-Montrer que $I_m\left(\dfrac{1}{m}, 1 + \dfrac{2}{m^2}\right)$ est un centre de symétrie pour (ζm).

b-Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie sur R^*.

EXERCICE N°11

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)= x^2(x+2)$

1°)Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$

2°)Démontrer que l'équation g(x) = 4 admet, sur $[0,+\infty[$, une unique solution a dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} .

3°)En déduire la résolution de l'inéquation : g(x) > 4 sur $[0,+\infty[$.

Partie B:

Soit f la fonction définie sur R^* par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$ et (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°)Etudier la parité de f .

2°)Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, et en déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats .

3°)Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (ζ_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (ζ_f) en $-\infty$.

4°)a)Démontrer que f est dérivable sur R^* et que $f'(x) = \dfrac{\sqrt{g(x^2)} - 2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$

b)Déduire de la partie A que $f'(x) > 0$ sur $\left]\sqrt{a},+\infty\right[$

c)Dresser le tableau de variations de f sur R^*

5°)Déterminer une équation de la tangente (T) à (ζ_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$

6°)Tracer la courbe (ζ_f).

EXERCICE N°12

Partie A

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^4 - 4x - 3$
1°) Etudier les variations de g.
2°) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur R telles que : $\alpha < 0 < \beta$.
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β.
c) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $R\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^3-1}$

1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout $x\neq 1$: $f(x) = ax + b + \dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$

b) En déduire que la courbe C_f représentative de f admet une asymptote oblique que l'on indiquera.
c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3°) a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 g(x)}{(x^3-1)^2}$

b) En déduire les variations de f.
4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.
5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.
6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)