

**EXERCICE N°1**

$ABCD$  est un carré de côté  $a$  et  $m$  est un réel de l'intervalle  $]0; 1[$ .

Les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont tels que  $\overrightarrow{DA'} = m \overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{AB'} = m \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC'} = m \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CD'} = m \overrightarrow{CD}$ .

Démontrer que le quadrilatère  $A'B'C'D'$  est un carré.

**EXERCICE N°2**

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ . On note  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $I$  sur la droite  $(AC)$ .

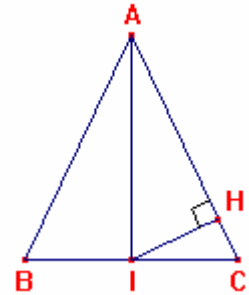
1°) Démontrer que :  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CH}$

2°) Calculer :  $\overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$

En déduire que  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC}$

3°) A l'aide des résultats précédents, démontrer que  $(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{BH} = 0$

En déduire que si on note  $J$  le milieu de  $[IH]$ , alors  $(AJ)$  est orthogonale à  $(BH)$ .



**EXERCICE N°3**

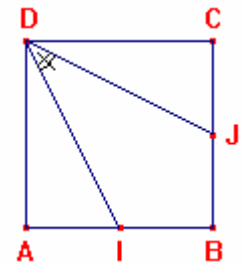
Soit un carré  $ABCD$  de côté  $a$ , on note  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $J$  le milieu de  $[BC]$ .

1°) Exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{DI}$  et  $\overrightarrow{DJ}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

En déduire la valeur de  $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$  en fonction de  $a$ .

2°) Calculer les longueurs  $DI$  et  $DJ$  en fonction de  $a$ .

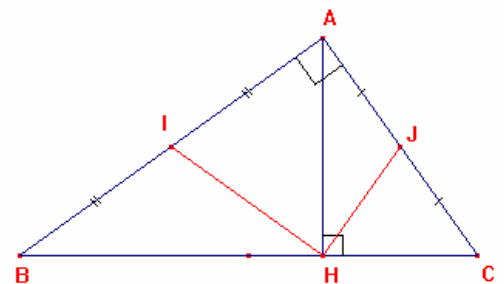
3°) Déduire des résultats précédents la valeur exacte de  $\cos(\angle IDJ)$



**EXERCICE N°4**

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ , le point  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $A$ , le point  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , le point  $J$  est le milieu de  $[AC]$ .

Prouver que les droites  $(HI)$  et  $(HJ)$  sont perpendiculaires.



**EXERCICE N°5**

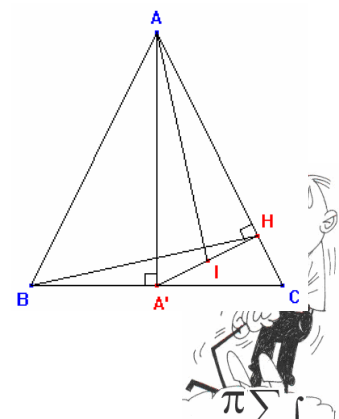
Soit  $ABC$  un triangle isocèle de sommet  $A$ . On note  $A'$  le milieu de  $[BC]$ ,  $H$  le projeté de  $A'$  sur  $(AC)$  et  $I$  le milieu de  $[A'H]$ .

1°) Démontrer que  $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH}$

2°) Démontrer que  $\overrightarrow{A'H} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{A'C}$

3°) Démontrer que  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{CH} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A'H} \cdot \overrightarrow{BC}$

4°) Déduire des résultats précédents que  $(AI)$  et  $(BH)$  sont orthogonales.



### EXERCICE N°6

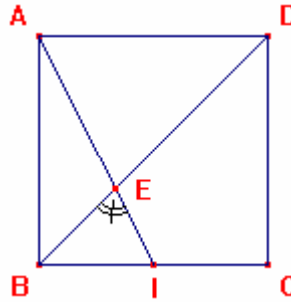
$ABCD$  est un carré de centre  $O$ ,  $M$  est un point du segment  $[AB]$ . La perpendiculaire menée de  $A$  à la droite  $(DM)$  coupe  $[BC]$  en  $P$ .

1°) Montrer que  $AM = BP$  et que les droites  $(OM)$  et  $(OP)$  sont perpendiculaires.

2°) Montrer que, lorsque  $M$  décrit la droite  $(AB)$ , le milieu  $I$  de  $[MP]$  reste sur la médiatrice de  $[OB]$ .

### EXERCICE N°7

Soit  $ABCD$  un carré de côté  $a$ . On note  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $E$  le point d'intersection des droites  $(AI)$  et  $(BD)$ .



- 1°) a) Calculer en fonction de  $a$  :  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DB}$ .  
 b) Calculer en fonction de  $a$  :  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BD}$ ,  
 et en déduire  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{DB}$

2°) En déduire une valeur à  $0,1^\circ$  près de l'angle  $BEI$

### EXERCICE N°8

Soit  $ABCD$  un carré de côté  $a$ . On note  $I, J$  et  $K$  les milieux des segments  $[AB], [AD]$  et  $[AI]$ , puis  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(DI)$ .

On se propose de démontrer, de deux façons différentes, que  $(JH)$  et  $(HK)$  sont perpendiculaires.

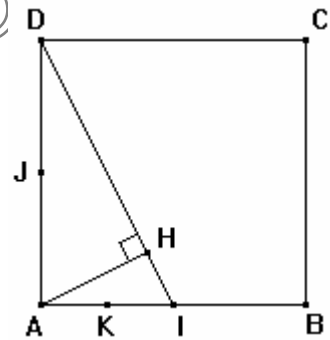
1°) 1<sup>ère</sup> méthode.

- a) Montrer que :  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HI} = 2\overrightarrow{HK}$  et que  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HJ}$ .  
 b) En déduire que  $4\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HA}^2 + \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HD}$ .  
 c) Démontrer que  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HD}$   
 d) En déduire que  $(JH)$  et  $(HK)$  sont perpendiculaires.

2°) 2<sup>ème</sup> méthode.

On considère le repère  $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

- a) Déterminer une équation de la droite  $(DI)$  et de la droite  $(AH)$ .  
 b) En déduire les coordonnées du point  $H$ .  
 c) Vérifier que  $(JH)$  et  $(HK)$  sont perpendiculaires.



### EXERCICE N°9

Dans un plan  $P$  on considère un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB=2BC=2$ .

Soit  $J$  le point du segment  $[CD]$  tel que  $CJ = \frac{1}{2}$ .  $(BJ)$  coupe  $(AC)$  en  $I$  et coupe  $(AD)$  en  $K$

**Partie I.**

1°) a) Faire une figure illustrant les données ci-dessus

b) Vérifier que  $AC = \sqrt{5}$ .

2°) Calculer :  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CJ}$

3°) En déduire que  $(BJ) \perp (AC)$ .

4°) a) Calculer la distance  $BJ$ .

b) Démontrer que  $BI = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

c) Calculer alors le produit scalaire :  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BJ}$

5°) Démontrer que :  $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$ .

**Partie II.**

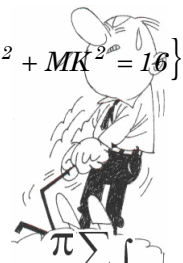
On considère les ensembles suivants :  $E = \{M, M \in \text{Pet} \mid MA^2 + MB^2 = 6\}$  et  $F = \{M, M \in \text{Pet} \mid 3MA^2 + MK^2 = 16\}$

1°) a) Vérifier que  $C \in E$ .

b) Déterminer alors l'ensemble  $E$  et le construire.

2°) a) Vérifier que  $A \in F$ .

b) Déterminer alors l'ensemble  $F$  et le construire.



### EXERCICE N°10

ABCD est un rectangle de largeur  $AD = a$  et de longueur  $AB = a\sqrt{2}$ .

E est le milieu de [AB].

Que peut-on dire des droites (AC) et (DE) ?

### EXERCICE N°11

Les points I et J sont les milieux des côtés [BC] et [CD] d'un carré ABCD (où  $AB = a$ ,  $a > 0$ ). On note  $\theta$  l'angle

$\widehat{IAJ}$ . Donner une valeur exacte de  $\cos \theta$  à 0,01 près.

### EXERCICE N°12

On donne dans le plan (P) un triangle ABC tel que  $BC = 8$ ,  $AB = 6$  et  $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{3}$  (rad).

Soit  $f$  l'application du plan (P) dans R définie par :  $f(M) = \vec{BC} \cdot \vec{AM}$ .

On désigne par  $\zeta_a$  l'ensemble des points M du plan tel que  $f(M) = a$ . où  $a$  est un réel.

1°) Déterminer  $\zeta_0$ .

2°) Calculer  $f(B)$  et  $f(C)$ .

3°) Déterminer le réel  $a$  tel que  $\zeta_a$  soit la médiatrice de [BC].

### EXERCICE N°13

On considère, dans le plan (P), un triangle AOB rectangle en O. On note M un point quelconque de (P).

1°) Montrer que :  $MA^2 + MB^2 - 2MO^2 = AB^2 + 4\vec{MO} \cdot \vec{OI}$  où I est le milieu de [AB].

2°) Déterminer l'ensemble  $\Delta$ , des points M de (P) tels que l'on ait :  $MA^2 + MB^2 - 2MO^2 = \frac{AB^2}{2}$ .

### EXERCICE N°14

On donne, dans un plan (P), un triangle ABC rectangle en A et isocèle et on a :  $AB = AC = 5$ .

1°) Déterminer le barycentre G du système (A, -1), (B, 1), (C, 1).

2°) Montrer que :  $MB^2 + MC^2 - MA^2 = MG^2$

3°) Déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points M du plan (P) tels que  $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 25$ .

4°) Déterminer l'ensemble ( $\Delta$ ) des points N du plan (P) tels que :  $\|\vec{NA} + \vec{NC} - \vec{NA}\| = NO$  où O est le milieu de [BC].

### EXERCICE N°15

Soit un triangle ABC.

1°) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que :  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AC} \cdot \vec{AM}$

2°) Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tels que :  $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = -\vec{AC} \cdot \vec{AM}$

