Fiche de cours — 4ème technique
NOMBRES COMPLEXES

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : http://maths-akir.midiblogs.com/

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Propriétés : *Soit M un point d'affixe* $z = a + ib, \quad a,b \in R$

$a = Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$	$b = Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
$z = 0 \Leftrightarrow Re(z) = Im(z) = 0$	$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$z\times\bar{z} = \lvert z\rvert^2 \quad , \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2} \quad , \; z \in C^*$
$z \in R \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$	$z \in iR \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
$Aff\left(\vec{AB}\right) = z_B - z_A$	$I = A * B \Leftrightarrow \quad z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$	$Aff\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right) = aAff\left(\vec{u}\right) + bAff\left(\vec{v}\right)$
$arg(z) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OM}[2\pi]\right) \; , z \in C^*$	$a \in R_+ : \quad z^2 = a \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{a} \quad ou \quad z = -\sqrt{a}$ $a \in R_- : \quad z^2 = a \Leftrightarrow \quad z = i\sqrt{\lvert a\rvert} \quad ou \quad z = -i\sqrt{\lvert a\rvert}$	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Propriétés : *Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier n on a :*

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z'}$	$\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$
$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}, (z \neq 0)$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)} = \dfrac{1}{\left(\bar{z}\right)^n}, (z \neq 0)$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}, (z' \neq 0)$

$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert}, (z \neq 0)$	$\left\lvert\dfrac{1}{z^n}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert^n}, (z \neq 0)$	$\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$

Forme cartésien – Forme trigonométriques

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

Forme cartésien $z = a + ib$	$\xleftarrow{\quad a = r\cos\theta, \; b = r\sin\theta \quad}$ $\xrightarrow{\quad r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}, \; \cos\theta = \frac{a}{r}, \; \sin\theta = \frac{b}{r} \quad}$	Forme trigonométriques $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r > 0$

$$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\theta = \frac{a}{r}, \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls d'écriture trigonométriques :
$z = [r,\theta] = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *et* $z' = [r',\theta'] = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$\bar{z} = [r,-\theta]$	$-z = [r,\pi+\theta]$	$kz = [kr,\theta], k > 0$	$kz = [-kr,\pi+\theta], k < 0$
$zz' = [rr',\theta+\theta']$	$\dfrac{1}{z} = \left[\dfrac{1}{r},-\theta\right]$	$\dfrac{z}{z'} = \left[\dfrac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$z^n = \left[r^n, n\theta\right], n \in Z$

Forme exponentielle

Pour tout réel θ *, on note* $e^{i\theta}$ *le nombre complexe* $\cos\theta + i\sin\theta$ *.*

$e^{i0} = 1$	$e^{i\pi} = -1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$\lvert e^{i\theta}\rvert = 1$	$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$	$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in Z$

Formule de Moivre

Pour tout réel φ *et tout entier* n *, on a :* $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

Formule d'Euler

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad et \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Racines nièmes

Soit a un nombre complexe non nul et $n \in N^*$ *tel que* $a = [r, \theta]$.

L'équation $z^n = a$ *admet dans C, n solutions distinctes définis par* $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Conséquences :

Les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème

Soit a un nombre complexe non nul d'argument φ. *L'équation z² = a admet dans C deux solutions opposées :*

$$z_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \quad et \quad z_2 = -\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Ces solutions sont appelées racines carrées du nombre complexe a .

Théorème

L'équation az² + bz + c = 0 (a , b et complexes et a non nul) admet deux solutions dans C :

$$z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b-\sigma}{2a} \quad où \quad \Delta = b^2 - 4ac \qquad et \quad \sigma \text{ est une racine carrée de } \Delta$$

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$	$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

A retenir : Soit $z^2 = a + ib \quad , a, b \in R$, *avec* $z = x + iy$ *alors on a* $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$

Théorème

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *des nombres complexes tels que* $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Si z_0 *est un zéro de P, alors* $P(z) = (z - z_0) g(z)$, *où g(z) est se la forme* $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0$, *avec* $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ *complexes.*