Produit vectoriel dans l'espace.

Pour tout base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ *de plan et tout réel d >0, il existe un unique vecteur* $\vec{k}$ *vérifiant :* $\left\|\vec{k}\right\| = d$, $\vec{k}.\vec{i} = \vec{k}.\vec{j} = 0$ *et la base* $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *est direct.*

Définition :

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *deux vecteurs* .

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ *par* $\vec{v}$ *, le vecteur défini comme suite :*

▪*Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires alors* $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

▪*Si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *ne sont pas colinéaires alors :*

i. $\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$ *et* $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.
ii. $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ *est une base direct.*
iii. $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \sin\left(B\hat{A}C\right)$

Conséquences et propriétés

i. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$
ii. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *, si et seulement si ,* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*
iii. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\vec{k}$ *où* $\vec{k}$ *unitaire et normale au plan (ABC)*
iv. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$
v. $a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$
vi. $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
vii. *L'espace est muni d'une base orthonormé direct* $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *.Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ *alors :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\vec{k}$$

Produit mixte.

*)*On appelle produit mixte de trois vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *données dans cet ordre le réel* $m = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)\vec{w}$ *noté* $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

*)$\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont coplanaires si et seulement si* $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = 0$

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *des vecteurs de l'espace.*

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à : $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$	*L'aire du triangle ABD est égale à :* $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$
Le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BA}\right|$	*Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à :* $\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{AE}\right|$