

**Produit scalaire dans le plan**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan et les points  $O, M, N$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ .

On appelle produit scalaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et défini comme suit :

Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OH}$  où  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur la droite  $(ON)$ .

Cas n°1: $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$	Cas n°2: $\theta = \frac{\pi}{2}$	Cas n°3: $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OH}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OH}$

**Conséquence**

1) Pour calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ , on peut remplacer le vecteur  $\overrightarrow{CD}$  par sa projection orthogonale sur le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  c'est-à-dire :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{C'D'}$

2)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

**Propriétés :**

Soit  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $a$  et  $b$  deux réels.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$		$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 + \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = 2(\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2)$		$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

**Les différentes expressions du produit scalaire**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\  \times \ \vec{v}\  \cos(\vec{u}, \vec{v})$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2)$	Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives $(x, y)$ et $(x', y')$ , on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

**Inégalité de Schwarz et de Minkowski**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs.

1°)  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  (Inégalité de Schwarz)

et l'égalité à lieu si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

2°)  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  (Inégalité de Minkowski)

et l'égalité à lieu si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et du même sens



**Application**

**L'aire de ABC est égale :**

$$S = \frac{ab}{2} \sin \beta = \frac{bc}{2} \sin \alpha = \frac{ac}{2} \sin \gamma$$

**Formule d'Al-Kashi**

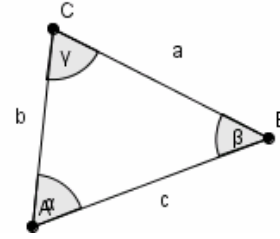
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

**Formule de sinus**

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



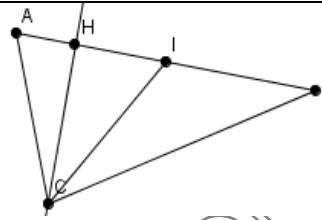
**Théorème de médiane**

$I = A^*B$  et H est le projeté orthogonal de C sur (AB) :

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CI^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

$$CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$CA^2 - CB^2 = 2\vec{AB} \cdot \vec{IH}$$



Soit ABC triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. On a alors

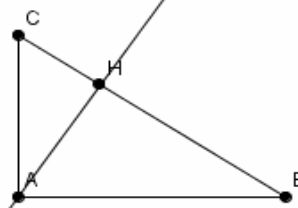
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$AH \times BC = AB \times AC$$

$$AH^2 = HB \times HC$$

$$AB^2 = AH \times AC$$

$$AC^2 = CH \times CB$$



<http://maths-okil.com/>

