Séries d'exercices $3^{ème}$ Maths
FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2\sin x\cos 2x-\sin 2x}$,

EXERCICE N°2

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-1}{4x-\pi}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x+1}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos(x)-1}{4\sin^2(x)-3}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x-1}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)\tan x$.

EXERCICE N°3

On donne les fonctions définies sur $[-\pi,\pi]$: $h(x)=x.\cos(x)-\sin(x)$ *et* $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$.

1°)Etudier les variations de h sur $[-\pi,\pi]$.
2°)En déduire le signe de h(x) sur $[-\pi,\pi]$.
3°)Montrer que g est continue en 0 .
4°)En admettant que g'(0)=0 . Donner les variations de g sur $[-\pi,\pi]$.
5°) Calculer : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\pi\sin x-3x}{6x^2-\pi x}$.

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie sur R par : f(x)= 1 +sinx +cosx +sinx.cosx.
On note (ζ) *la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $R=(O,\vec{i},\vec{j})$.
1°)Montrer que pour tout réel x , on f(x) = (1+cosx).(1+sinx).
2°)Montrer que la droite Δ : $x=\dfrac{\pi}{4}$ *est axe de symétrie de* (ζ).
3°)Montrer qu'on peut étudier f sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$
4°)Montrer que , pour tout réel x , on a : f '(x)=(cosx – sinx)(cosx+sinx+1).
5°)Dresser la tableau des variations de f sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$
6°)Tracer (ζ).

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par f(x)= $\dfrac{\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}$ *, On note* (ζ) *la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $R=(O,\vec{i},\vec{j})$.
1°)Déterminer le domaine de définition D_f *de f .*
2°)a-Montrer que la droite Δ : $x=\dfrac{\pi}{2}$ *est axe de symétrie de* (ζ).
b-En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $D_E=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3°)a-Montrer que pour tout $x\in D_E$, $f'(x)=\dfrac{-2\cos x.(1+2\sin x)}{(1+\sin x)^3}$.
b-Dresser la tableau de variation de la restriction f à D_E .
4°)a-Calculer f(0) , $f(\dfrac{\pi}{4})$ *et* $f(\dfrac{-\pi}{4})$.

b-Tracer la partie de (ζ) relative à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

5°)Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x+\frac{\pi}{2})+1$. On désigne par (ζ') la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que (ζ') est l'image de (ζ) par une translation dont on précisera le vecteur.

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{6})$, On note (ζ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O,\vec{i},\vec{j})$.

1°)a)Donner la période de f .

b)Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{7\pi}{6}$ est axe de symétrie de (ζ).

c)Déterminer le point d'inflexion I de (ζ) dont est un élément de $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

d)Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (ζ) en I.

e)Montrer que I est un centre de symétrie de (ζ).

2°)Dresser le tableau de variation de la restriction de f à $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$. Puis construire (ζ).

3°)Soit la fonction g définie sur [0 , π] par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1}{2\left(2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right)} & si \quad x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & si \quad x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a)Etudier la continuité de g en point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

b)Montrer qu'il existe une constante réelle a que l'on déterminera telle que pour tout x de [0 , π] ,
$g(x)=f(x)+a$.

c)Contruire la courbe représentative de g dans le même repère .

EXERCICE N°7

Soit la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{4\cos^2 2x}{2\cos 2x-1}$. On note (ζ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de (ζ).

3°)a- Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{8\sin 4x.(1-\cos 2x)}{(2\cos 2x-1)^2}$.

b- Dresser la tableau de variation de f sur $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cap D_f$.

4°)a-Construire la courbe (ζ') de la restriction de f à $[0,\pi] \cap D_f$.

b-Expliquer comment (ζ) déduit de (ζ').

5°)Soit l'équation E : $3\cos^2(2x) - 2k.\cos(2x) + k = 0$; $k \in R$. Utiliser (ζ') pour déterminer les valeurs de k , pour lesquelles l'équation E admettre 4 solutions distincts dans $[0,\pi]$.

EXERCICE N°8

Soit f la fonction définie sur [0,2] par : $f(x) = E(x).\sin(\pi x)$ où E est la partie entière du nombre réel x.

1°)Simplifier f(x).

2°)Montrer que f est continue sur [0,2]

3°)Etudier la dérivabilité de f en 1.

4°)Déterminer le domaine où elle dérivable et calculer f '(x).

5°)Dresser le tableau de variations de f .