LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré $a_n x^n$ *et* $b_n x^m$ *respectivement alors*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple : $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 2x^4 + x - 1}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$

Limites trigonométries

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x} = 0$$

Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x.\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{x.\sin(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

Théorème d'encadrement

Soit f , g et h trois fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x) \le h(x) \le g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = l & (l \in R) \end{cases}$ *alors* $\lim_{x_0} h = l$ *(* x_0 *fini on infini)*

Exemple : $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *. On a :* $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ *alors pour tout* $x > 0$ *:* $-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$

Alors on a : $\begin{cases} -x \le x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x & \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \\ \lim_{0^+}(-x) = \lim_{0^+} x = 0 \end{cases}$ *alors* $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x) \ge g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = +\infty \end{cases}$ *alors* $\lim_{x_0} f = +\infty$

Si $\begin{cases} f(x) \le g(x) & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = -\infty \end{cases}$ *alors* $\lim_{x_0} f = -\infty$ *(* x_0 *fini on infini)*

Exemple : *Soit* $f(x) = x^2.(2+\cos(x))$*. Calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *.*

On a : $2 + \cos x \ge 2 + -1$ *alors* $2 + \cos x \ge 1$ *ainsi* $f(x) \ge x^2$

On a alors $\begin{cases} f(x) \ge x^2 & \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Théorème ; fonction composé

Soit f et g deux fonctions telles que :

$\lim_{x_0} f = y$ *et* $\lim_{y} g = z$ *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = z$ *(* x_0 *, y et z finis ou infinis)*

Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1+\pi x}{2x}\right)$*. On peut écrire* $h = g \circ f$ *avec* $f : x \mapsto \frac{1+\pi x}{2x}$ *et* $g \mapsto \sin(x)$ *et* $h(x) = \sin\left(\frac{1+\pi x}{2x}\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\pi x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 1$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1$

FONCTION CONTINUE

Définition 1 :

Une fonction f est continue en un point a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Définition 2 :

Une fonction f est continue sur un intervalle I, si elle est définie sur cet intervalle et si : pour tout réel a de I $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Théorème

**)L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*
**)les fonctions polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
**)les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition c'est à dire en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.*
**)Si f est continue en* x_0 *et g est continue en* $f(x_0)$, *alors* $g \circ f$ *est continue en* x_0

Théorème :

**) Soit f une fonction f définie sur un intervalle de type* $[a,b[$ *(b finie ou infini)*
Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ *en b.*
**) Soit f une fonction f définie sur un intervalle de type* $]a,b]$ *(a finie ou infini)*
Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a.
Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ *en a .*

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b], alors pour tout réel c compris entre f (a) et f (b) , l'équation f (x) = c admet aux moins une solution $\alpha \in [a,b]$.

Corollaire 1 de TVI

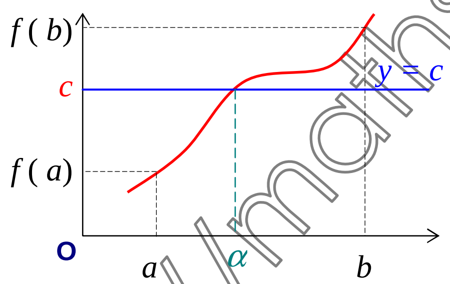
Si f est continue sur I = [a,b] et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ *alors il existe au moins un réel* $x_0 \in]a,b[$ *tel que* $f(x_0) = 0$.
Et si de plus f est strictement monotone sur I alors il existe un unique réel $x_0 \in]a,b[$ *tel que* $f(x_0) = 0$.

Corollaire 2 de TVI

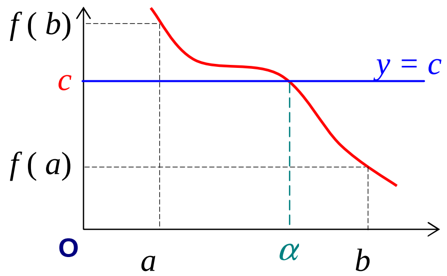
Si f est continue sur I = [a,b] et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur I

Exemple : $I=[1,2]$ *et* $f(x) = x^3 + x - 3$
f est dérivable sur I et on a : $f'(x) = 3x^2 +1 > 0$
$f(1)=-1$ *et* $f(2)=7$
Alors on a : f est continue sur I , $f(1) \times f(2) < 0$ *et f est strictement croissante sur I*
Alors il existe un unique réel $x_0 \in]1,2[$ *tel que* $f(x_0) = 0$.

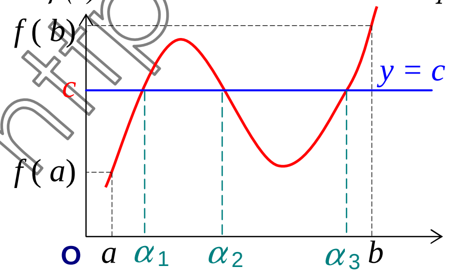
Illustrations graphiques



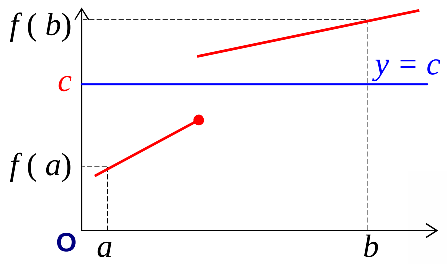
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [a ; b].
L'équation f (x) = c admet une solution unique.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c admet une solution unique .



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c peut avoir plusieurs solutions



f n'est pas continue sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c peut ne pas avoir de solutions.