### *EXERCICE N°1*

*Soit un parallélogramme ABCD. Le point I est le milieu de [BC] et le point E est défini par :*

$\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ *et le point A' est le milieu de [AC].*

*1°)Construire les points I , A' et E .*

*2°)Montrer que :* $\vec{DE} = \frac{1}{3}\vec{DA} + \frac{2}{3}\vec{DC}$

*3°)Montrer que :* $\vec{DI} = \frac{1}{2}\vec{DA} + \vec{DC}$

*4°)En déduire que les points D , E et I sont alignés.*

*5°)Construire les points T et H tels que :* $\vec{AT} = 4\vec{AB}$ *et* $\vec{BH} = 3.\vec{BC}$

*6°)Montrer que (TH) est parallèle à (BA')*

### *EXERCICE N°2*

*Soit un triangle DIM. Soit A est le milieu de [DM].*

*4°)Construire les points T et H tels que :* $\vec{DT} = 4\vec{DI}$ *et* $\vec{IH} = 3.\vec{IM}$

*5°)Montrer que (TH) est parallèle à (IA)*

### *EXERCICE N°3*

*Soit un triangle ABC . On désigne par A' et B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] , [CA] et [AB]. Soit G le point tel que :* $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ *.*

*1°)Montrer que :* $\vec{GB} + \vec{GC} = 2.\vec{GA'}$ *. En déduire que* $\vec{AG} = 2.\vec{GA'}$ *.*

*2°)Montrer de même que* $\vec{BG} = 2.\vec{GB'}$ *et que* $\vec{CG} = 2.\vec{GC'}$ *.*

*3°)En déduire que les trois médianes sont concourantes en G . (Le point G est appelé centre de gravité du triangle)*

### *EXERCICE N°4*

*Soit ABC un triangle . On désigne par O le centre du cercle circonscrit, par G le centre de gravité et par H l'orthocentre.*

*Soient M le milieu de [BC] et D le point diamétralement opposé à A sur le cercle .*

*1°)Quelle est la nature du quadrilatère BHCD ? En déduire que* $\vec{HA} = 2.\vec{MO}$ *.*

*2°)Démontrer que :* $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$ *et* $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ *.*

*3°)On utilisant la relation :* $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ *.*

*Montrer que :* $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$ *.*

*4°)En déduire que O , H et G sont aligné .*

*(La droite portant les points O , G et H est appelée droite d'Euler du triangle ABC .)*

### *EXERCICE N°5*

*Soit un parallélogramme ABCD . Soit M le point défini par :* $3\vec{MA} + 2\vec{MB} - 4\vec{MC} = \vec{0}$ *.*

*1°)Montrer que :* $\vec{AM} = 2\vec{AB} - 4\vec{AC}$ *.*

*2°)Déterminer le couple (x , y) de réels tel que :* $\vec{DM} = x\vec{DC} + y\vec{DB}$ *.*

*3°)Déterminer le couple (x' , y') de réels tel que :* $\vec{DM} = x'\vec{DC} + y'\vec{DA}$ *.*

## EXERCICE N°6

*Etant donné un triangle ABC, à chaque réel k on associe les points M et N définis par :*

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + (1-k)\overrightarrow{AB}$$

*1°) Placer les points M et N correspondant à la valeur*
*$k = 2$.*

*2°) Montrer que, pour tout réel k, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.*

*3°) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles :*

- *a) $M = N$.*
- *b) BCMN est un parallélogramme.*
- *c) BCNM est un parallélogramme.*

## EXERCICE N°7

*Soient A, B et C trois points quelconques. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par :*

$$\vec{u} = \left(1-\sqrt{5}\right)\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \left(1+\sqrt{5}\right)\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$$

*sont colinéaires.*

## EXERCICE N°8

*Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base . On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par :*

$$\vec{u} = 2\,\vec{i} + \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$$

*1°)Montrer que $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ est une base .*

*2°)Soit $\vec{e}$ le vecteur défini par : $\vec{e} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v}$ .*
*X , Y , x et y étant quatre réels . Calculer X et Y en fonction de x et y .*

## EXERCICE N°9

*Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] , J le milieu de [AC] et H le milieu de [I J]. Déterminer l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :*

*1°)* $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$ ; *2°)* $\left\|2.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4.\,AB$

## EXERCICE N°10

*Soient A et B deux points du plan .*

*Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que :* $2.AB \le \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| \le 4.AB$

## EXERCICE N°11

*Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base orthonoemale. Soit $\vec{U} = \vec{i} + 3\,\vec{j}$ .*

*Déterminer le vecteur $\vec{V}$ tel que :* $\begin{cases} \vec{V} \perp \vec{U} \\ \left\|\vec{V}\right\| = \left\|\vec{U}\right\| \end{cases}$

## EXERCICE N°12

*Soit A , B , C et D sont quatre points du plan . Soient I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BD] .*

*1°)Démontrer que :* $2\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

*2°)M étant un point quelconque du plan,*
*Soit :* $M_1 = S_A(M)$ ; $M_2 = S_B(M_1)$ ; $M_3 = S_C(M_2)$ *et* $M' = S_D(M_3)$ .

*Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ reste constant quand le point M varie.*

*3°)Comment faut-il choisir les points A , B , C et D pour que les points M et M' soient confondus ?*

## EXERCICE N°13

*Soit ABC un triangle, G son centre de gravité et A' , B' et C' les milieux respectifs de [BC] , [CA] et [AB]. A tout point M du plan on associe le point S tel que :*

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

*1°)Exprimer $\overrightarrow{MS}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$. En déduire une propriété des droites (AS) et (MA') et exprimer $\overrightarrow{AS}$ en fonction de $\overrightarrow{MA'}$.*

*Exprimer de même : $\overrightarrow{BS}$ en fonction de $\overrightarrow{MB'}$ et $\overrightarrow{CS}$ en fonction de $\overrightarrow{MC'}$*
*2°)Soit A" , B" et C" les milieux respectifs de [SA] , [SB] et [SC].*
*Montrer que les segments [A'A"] , [B'B"] , [C'C"] et [SM] on le même milieu .*

***EXERCICE N°14***

*$R=\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*

*Soient $A_1$ , $A_2$ deux points du plan.*

*1°)Montrer que : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$*

*2°)Prouver que : $2.\left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right\|$*

*3°)En déduire que : $\left\|\overrightarrow{OA_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_2}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right\|$*

*4°)Soit ABC un triangle et I est le milieu de [BC]. Montrer que : $BC \leq AB + AC \leq 2.AI + BC$*