**Fiche de cours** $4^{ème}$ *inf*

**CONTINUITE**

**MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR**

**Site Web :** ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

*Soit I un intervalle ouvert et* $x_0 \in I$

### *Continuité à droites – Continuité à gauche.*

**) f est continue en* $x_0$*, si et seulement si f est continue à droite et à gauche en* $x_0$.

**) Soit f une fonction positive sur I.*

*Si f est continue en* $x_0$*, alors* $\sqrt{f}$ *est continue en* $x_0$,

*Si f est continue à droite en* $x_0$*, alors* $\sqrt{f}$ *est continue à droite* $x_0$.

*Si f est continue à gauche en* $x_0$*, alors* $\sqrt{f}$ *est continue à gauche* $x_0$.

### *Continuité sur un intervalle.*

**)Une fonction définie sur un intervalle* $]a,b[$ *est dite continue sur* $]a,b[$ *si elle est continue en tout réel de* $]a,b[$.

**)Une fonction définie sur un intervalle* $]a,b]$ *est dite continue sur* $]a,b]$ *si elle est continue* $]a,b[$ *et continue à gauche de b.*

**) Une fonction définie sur un intervalle* $[a,b[$ *est dite continue sur* $[a,b[$ *si elle est continue* $]a,b[$ *et continue à droite de a.*

**) Une fonction définie sur un intervalle* $[a,b]$ *est dite continue sur* $[a,b]$ *si elle est continue* $]a,b[$ *et continue à droite de a et à gauche de b.*

### *Théorème*

**)les fonctions polynômes sont continues sur* $R$.

**)les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition c'est à dire en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.*

**)Si f est continue en* $x_0$ *et g est continue en* $f(x_0)$*, alors* $g \circ f$ *est continue en* $x_0$

### *Théorème de la valeur intermédiaire*

*Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b], alors pour tout réel c compris entre f (a) et f (b) , l'équation f (x) = c admet aux moins une solution* $\alpha \in [a,b]$.

***Corollaire 1 de TVI***

*Si f est continue sur* $I = [a,b]$ *et telle que* $f(a) \times f(b) < 0$ *alors il existe au moins un réel* $x_0 \in ]a,b[$ *tel que* $f(x_0) = 0$.

*Et si de plus f est strictement monotone sur I alors il existe un unique réel* $x_0 \in ]a,b[$

*tel que* $f(x_0) = 0$.

***Corollaire 2 de TVI***

*Si f est continue sur* $I = [a,b]$ *et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur I*

***Exemple :*** $I=[1,2]$ *et* $f(x) = x^3 + x - 3$

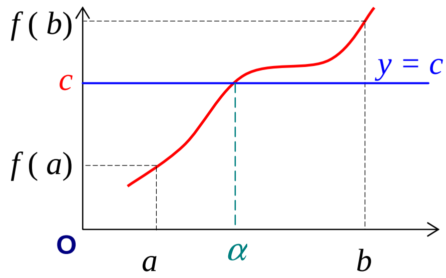
*f est dérivable sur I et on a :* $f'(x) = 3x^2 +1 > 0$

$f(1)=-1$ *et* $f(2)=7$

*Alors on a : f est continue sur I ,* $f(1) \times f(2) < 0$ *et f est strictement croissante sur I*

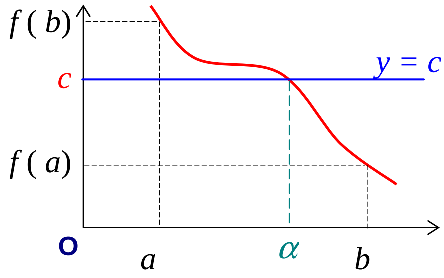
*Alors il existe un unique réel* $x_0 \in ]1,2[$ *tel que* $f(x_0) = 0$.

## *Illustrations graphiques*



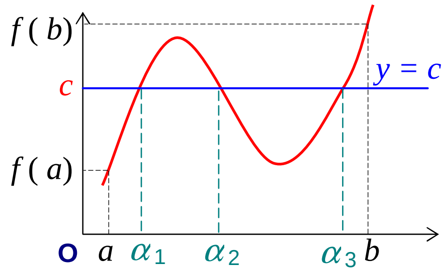

*f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [ a ; b ].*

*L'équation f (x) = c admet une solution unique.*



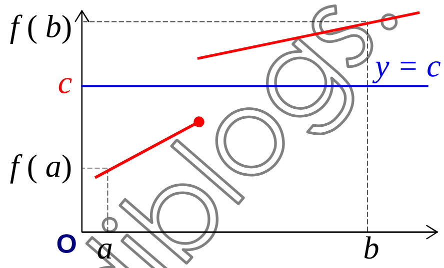

*f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [ a ; b ] .*

*L'équation f (x) = c admet une solution unique .*




*f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle [ a ; b ] .*

*L'équation f (x) = c peut avoir plusieurs solutions*




*f n'est pas continue sur l'intervalle [ a ; b ] .*

*L'équation f (x) = c peut ne pas avoir de solutions.*

### ***Théorème :***

*Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les propriétés suivantes :*

*(*) la fonction f est une bijection de I sur f(I)*

*(*)La fonction $f^{-1}$ est une bijection de f(I) sur I et on a : $(x\in I\ ,\ y=f(x)) \Leftrightarrow (y\in f(I)\ ,\ x=f^{-1}(y))$*

*(*)La fonction $f^{-1}$ est strictement monotone sur f(I) et a la même sens de variations que f .*

*(*) Les courbes représentatives de f et $f^{-1}$, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (y = x)*

*Si est du plus f est continue sur I alors $f^{-1}$ est continue sur f(I)*

***Exemple*** *:Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.*

*Montrer que f réalise une bijection de I= $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ sur un intervalle J qu'on précisera.*

***Correction***

*Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .*

*On a $\forall x\in I : f'(x) = \dfrac{-1}{(2x-1)^2} < 0$ alors f est strictement décroissante et continue sur I alors f réalise une bijection de I sur J = f(I) = $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to(-0,5)^+} f(x)\right[ = \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$*

*Pour tout $x\in J$ : $y=f^{-1}(x)$ équivaut à $x=f(y)$ et $y\in I$*

*équivaut à $x=\dfrac{y+1}{2y+1}$ et $y\in I$ équivaut à : $2xy+x=y+1$ et $y\in I$ équivaut à $y=\dfrac{1-x}{2x-1}$ et $y\in I$*

*alors pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$*