Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Limite en un réel

**)Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.*

**)* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ *, si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$

Opération sur les limites

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell'$ *alors :*

$\lim\limits_{x_0} f+g=\ell+\ell'$	$\lim\limits_{x_0} kf=k\ell$	$\lim\limits_{x_0} \lvert f\rvert=\lvert\ell\rvert$
$\lim\limits_{x_0} \frac{1}{f}=\frac{1}{\ell}\ (\ell\neq 0)$	$\lim\limits_{x_0} \frac{g}{f}=\frac{\ell'}{\ell}\ (\ell\neq 0)$	*Si* $f(x)\geq 0$ *alors* $\lim\limits_{x_0}\sqrt{f}=\sqrt{\ell}$
Si $f(x)\geq 0$ *alors* $\ell\geq 0$	*Si* $f(x)\leq 0$ *alors* $\ell\leq 0$	

Continuité en un réel.

**)f est continue en* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

**) f est continue à droite de* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

**) f est continue à gauche de* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

**) f est continue en* x_0 *si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en* x_0 *.*

**)Une fonction f est continue sur un intervalle I, si elle est définie sur cet intervalle et si : pour tout réel a de I* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Conséquences

**)Toutes fonction constante est continue en tout réel* x_0 *.*

**)La fonction affine est continue en tout réel* x_0 *.*

**)Toute fonction polynôme est continue en tout réel* x_0 *.*

**) Toute fonction rationnelle est continue en tout réel* x_0 *de domaine de définition.*

**)La fonction* $x\mapsto\sqrt{x}$ *est continue en tout réel positif* x_0 *.*

**)Si f est continue en* x_0 *, alors* $\lvert f\rvert$ *est continue* x_0 *.*

**) f une fonction positive sur I.*

Si f est continue en x_0 *, alors* $\sqrt{f}$ *est continue* x_0 *.*

Opération sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle I

**)Si f et g sont continues en* x_0 *alors les fonction f+g , fg et kf sont continues en* x_0 *.*

**) Si f et g sont continues en* x_0 *et si* $g(x_0)\neq 0$ *alors les fonction* $\frac{1}{g}$ *et* $\frac{f}{g}$ *sont continues en* x_0 *.*

**) f une fonction positive sur I.*

Si f est continue à droite en x_0 *, alors* $\sqrt{f}$ *est continue à droite* x_0 *.*

Si f est continue à gauche en x_0 *, alors* $\sqrt{f}$ *est continue à gauche* x_0 *.*

Continuité sur un intervalle.

**)Une fonction définie sur un intervalle* $]a,b[$ *est dite continue sur* $]a,b[$ *si elle est continue en tout réel de* $]a,b[$*.*

**)Une fonction définie sur un intervalle* $]a,b]$ *est dite continue sur* $]a,b]$ *si elle est continue* $]a,b[$ *et continue à gauche de b.*

**) Une fonction définie sur un intervalle* $[a,b[$ *est dite continue sur* $[a,b[$ *si elle est continue* $]a,b[$ *et continue à droite de a.*

**) Une fonction définie sur un intervalle* $[a,b]$ *est dite continue sur* $[a,b]$ *si elle est continue* $]a,b[$ *et continue à droite de a et à gauche de b.*

**)Toute fonction polynôme est continue sur R*

**) Toute fonction rationnelle est continue sur sa domaine de définition.*

Image d'un intervalle

**)L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré a_nx^n et b_nx^m respectivement alors

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_nx^n \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-2x^4+x-1}{x^2+5x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$

Branches paraboliques ,

Si :	***Alors :***
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	(ζf) *admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite* $(O,\vec{i})$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	(ζf) *admet une branche infinie de direction asymptotique celle de la droite* $(O,\vec{j})$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$	Δ *: y = b est une asymptote à la courbe* (ζf)
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	Δ *:x = a est une asymptote à la courbe* (ζf)
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax-b) = 0$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax-b) = 0$	Δ *: y = ax+b est une asymptote oblique à la courbe* (ζf)