

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie sur $[-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = |x^2 + x| \sqrt{x+1}$.

1°) Déterminer le signe de $P(x) = x^2 + x$ suivant les valeurs de x dans $[-1 ; +\infty[$.

1°) Etudier la dérivabilité de f en $x = -1$.

2°) Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$.

3°) Conclure sur les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse -1 et 0 .

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[-4, 4]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = -2x - 4 & \text{si } x \in [-4; -2] \\ f(x) = 2 - x - x^2 & \text{si } x \in]-2; 4]. \end{cases}$$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormal.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$.

b) f est dérivable en $x = -2$.

c) (C) admet deux tangentes horizontales.

d) La tangente à (C) au point d'abscisse $x = -1$ a un unique point d'intersection avec (C) .

e) La tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ a un unique point d'intersection avec (C) .

EXERCICE N°3

Comparer, sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0.9 \tan x$ et $\tan(0.9x)$

EXERCICE N°4

Montrer que :

1°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

2°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x$

3°) Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq \frac{\pi}{2} - x$

4°) Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $\frac{\pi}{2} - 2x \leq \cotan(x) - 1 \leq \frac{\pi}{4} - x$

5°) Pour tout $x > 0$: $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE N°5

Montrer que : pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $2 \sin x + \tan x \geq 3x$

EXERCICE N°6

Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1°) Montrer que : si f est paire alors $\exists a \in \mathbb{R} / f'(a) = 0$

2°) Montrer que : si f est impaire alors $\exists b \in \mathbb{R} / f''(b) = 0$.

EXERCICE N°7

Partie I

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus

2°) Montrer que $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x}} & \text{si } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



3°) Dresser le tableau des variations de f

4°) Montrer que si $x > 2$ alors $f(x) > 2$

5°) Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Partie II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$

1°) Montrer que : pour tout n de \mathbb{N} : $u_n > 2$.

2°) Etudier les variations de (u) .

3°) En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

4°) Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{u_n - 2}{2}$

5°) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} : $u_n - 2 \leq \frac{1}{2^n}$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°8

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$

1°) Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2°) a) Justifier que f_n est dérivable sur $[0, 1[$ et montrer que $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}} (2n - (2n+1)x)$

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 1.

c) Dresser le tableau de variations de f_n .

3°) a) Montrer que f_n admet un maximum a_n que l'on exprimera en fonction de n .

b) Prouver que $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

