

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0$  un réel de  $I$ .

### Limite en un réel

\*)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  signifie, pour tout nombre  $\beta > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que si  $(x \in I, \text{ et } |x - x_0| < \alpha)$  alors

$$|f(x) - \ell| < \beta$$

\*) Si  $f$  admet une limite en  $a$  alors cette limite est unique.

\*)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$  signifie, pour tout nombre  $\beta > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que si  $(x \in I \text{ et } 0 \leq x - x_0 < \alpha)$ ,

$$\text{alors } |f(x) - \ell| < \beta$$

\*)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$  signifie, pour tout nombre  $\beta > 0$ , il existe un nombre  $\alpha > 0$  tel que si  $(x \in I \text{ et } 0 \leq x_0 - x < \alpha)$

$$\text{alors } |f(x) - \ell| < \beta$$

\*)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$

### Opération sur les limites

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$  alors :

$\lim_{x_0} f + g = \ell + \ell'$	$\lim_{x_0} kf = k\ell$	$\lim_{x_0}  f  =  \ell $
$\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell} (\ell \neq 0)$	$\lim_{x_0} \frac{g}{f} = \frac{\ell'}{\ell} (\ell \neq 0)$	Si $f(x) \geq 0$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$
Si $f(x) \geq 0$ alors $\ell \geq 0$		Si $f(x) \leq 0$ alors $\ell \leq 0$

### Continuité

\*)  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

\*)  $f$  est continue à droite de  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

\*)  $f$  est continue à gauche de  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

\*)  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si,  $f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$ .

\*) Une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , si elle est définie sur cet intervalle et si : pour tout réel  $a$  de  $I$   
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

