EXERCICE N°1

En utilisant le principe de récurrence, montrer que :

1°)Pour tout $n \in N^*$: $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2°)Pour tout $n \in N^*$: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3°)Pour tout $n \in N^*$: $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

4°) Pour tout $n \in N^*$: $1.(1!)+2(2!)+\ldots+n(n!)=(n+1)!-1$

5°) Pour tout $n \in N$: 9 divise 10^n-1

6°) Pour tout $n \in N$: 7 divise $2^{3n}-1$

7°) Pour tout $n \in N$: 9 divise $2^{4n+1}-2^{2n}+8$

8°) Pour tout $n \in N$: 6 divise $n(2n+1)(7n+1)$

EXERCICE N°2

1°)Cocher le réponse exacte.
Soit n et p deux entiers naturels non nul.
a)Le reste de la division euclidienne de n^2 par 3 sont :
b)Le reste de la division euclidienne de n^2+p^2 par 3 sont :

$\boxed{A}$: 0 $\boxed{B}$: 1 $\boxed{C}$: 2 $\boxed{D}$: 0 ou 1 $\boxed{E}$: 0 ou 2 $\boxed{F}$: 1 ou 2 $\boxed{G}$: 0 ou 1 ou 2

2°)Soient x , y et z trois entiers naturels tels que : $x^2+y^2=z^2$
Montrer que l'un au moins de ces trois entiers est multiple de 3 .

EXERCICE N°3

Résoudre dans N^2 les systèmes suivants :

$S_1 : \begin{cases} x+2y=132 \\ x \wedge y = 11 \end{cases}$, $S_2 : \begin{cases} xy=1694 \\ x \vee y = 154 \end{cases}$ $S_3 : \{x+y=xy$

EXERCICE N°4

On effectue la division euclidienne d'un nombre à trois chiffres par la somme des ses chiffres. Le quotient obtenu est 10. Quel est le dividende ?

EXERCICE N°5

1°)Montrer que pour tout $(x,n)\in R\times N$: $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^n)=x^{n+1}-1$

2°)Soit $(m,n)\in N^{*2}$ avec $m>n$. Soit r le reste de la division euclidienne de m par n .

Montrer que (a^r-1) est le reste de la division euclidienne de (a^m-1) par (a^n-1)

EXERCICE N°6

Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $n \in N^*$
Prouver que pour tout couple (p,q) d'entiers, on a : $|p-q|$ divise $|P(p)-P(q)|$

EXERCICE N°7

Soient a et b deux entiers naturels non nul tel que a < b. Soit $d=a\wedge b$ et $m=a\vee b$.
Déterminer toutes les couples (a , b) vérifient : 2m + 3d = 78 et tel que a ne soit pas un diviseur de b.

EXERCICE N°8

Soient a et b deux entiers naturels non nul. Soit $d=a\wedge b$ et $m=a\vee b$.
Déterminer toutes les couples (a , b) vérifient : m - 18d = 791.

EXERCICE N°9

1°) Soit $a\in N$. Déterminer les restes possible de la division euclidienne de a^2 par 8.
2°)Montrer que qu'il n'existe pas quatre entiers naturels x , y , z , k tels que l'on ait : $x^2+y^2+z^2=8k+7$

EXERCICE N°10

Soient a et b deux entiers naturels non nul. Soit $d=a\wedge b$ et $m=a\vee b$ tel que m + d = b + 9(*)
1°)Montrer que d divise 9
2°) Déterminer toutes les couples (a , b) vérifient (*)

EXERCICE N°11

Soient a et b deux entiers naturels non nul. Soit $d=a\wedge b$ et $m=a\vee b$.
Déterminer toutes les couples (a , b) vérifient : d = 10 et m = 100.

EXERCICE N°12

1°)Soit $x \in N$. Déterminer les valeurs de x sachant que x² divise 2000.

2°) Soient a et b deux entiers naturels non nul. Soit $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$ tel que $m^2 - 5d^2 = 2000$(*)

- *a- Montrer que d² divise 2000*
- *b- Déterminer toutes les couples (a , b) vérifient (*)*

EXERCICE N°13

1°) a- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7

b-En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2°) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3°) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

- *a- Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?*
- *b- Démontrer que si p = 3n + 1 alors A_p est divisible par 7.*
- *c- Étudier le cas où p = 3n + 2.*

EXERCICE N°14

Soit a , b , c trois entiers naturels tel que $a \wedge c = 1$ et $c \geq 2$

Soit l'application f définie par : $f : I = \{0,1,2,...,c-1\} \to N \quad ,x \mapsto ax + b$

On note par r (x) le reste de la division euclidienne de f(x) par c.

Montrer que : pour tout x et x' de I on a : Si r (x) = r (x') alors x = x'

EXERCICE N°15

Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite d'entiers naturels vérifiant les propriétés suivantes :

Pour tout couple d'entiers (n , p) : $u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}$

1°)Montrer que , pour tout n de N : u_n est un diviseur de u_0 .

2°)Montrer que , Pour tout couple d'entiers (n , p) : $u_n \wedge u_p = u_{u_n \wedge u_p}$

EXERCICE N°16

1°)Montrer que : $8\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 6\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 1 = 0$

2°)En déduire que : $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \notin Q$ (c'est-à-dire , montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est un nombre irrationnel)

(Rappel : si $x \in Q_+$ alors il existe $(p,q) \in N \times N^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$).

EXERCICE N°17

1°)Montrer que , tous les nombres premiers supérieure ou égale à 5 , sont de la forme 6k + 1 ou 6k + 5, ou k est un entier quelconque. Etudier la réciproque .

2°)Soit p , q deux nombres premiers. On dit que p et q sont jumeaux si q = p + 2.

Donner quelques exemples des nombres jumeaux.

Dans la suite : on prend p et q deux nombres jumeaux

3°)Montrer que : pq + 1 est un carré parfait.

4°)Montrer que : pq + 1 est divisible par 15.

5°)Montrer que : si $p \geq 5$, alors p , p+2 et p + 4 ne peuvent pas être en même temps premiers.

6°)Déterminer p tel que : pq – 2 soit aussi premier .

EXERCICE N°18

Soit a et b deux entiers naturels.

1°)Montrer que 7 divise $(a+b)^7 - (a^7 + b^7)$

2°)En déduire que : 7 divise $(a+b)$ si et seulement si : 7 divise $(a^7 + b^7)$

3°)Trouver tous les entiers x tels que : $\begin{cases} 9 \leq x \leq 22 \\ 7 \text{ divise } (x^7 + 128) \end{cases}$

EXERCICE N°19

Partie A: Soit x un nombre réel.

1°) Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.

2°) En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie B: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1°) Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2°) Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3°) Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise 4n.

4°) Dans cette question on suppose que n est impair.

- *a- Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair*
- *b- Montrer que d divise n.*
- *c- En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.*

5°) On suppose maintenant que n est pair.

- *a- Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.*
- *b- Montrer que d est de la forme d = 2p, où p est impair.*
- *c- Montrer que p divise n. En déduire que d = 2. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.)*

EXERCICE N°20

1°)Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $(a+b)\wedge ab = p$, où p est un nombre premier.

- *a- Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b)-ab$)*
- *b- En déduire que p divise a. (On constate donc, de même, que p divise b.)*
- *c- Démontrer que $p = a \wedge b$.*

2°) On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \le b$.

a - Résoudre le système $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases}$.

b- En déduire les solutions du système : $\begin{cases} (a+b) \wedge ab = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases}$.