Devoir de synthèse n°2

Bienvenue sur mon blog
de mathématiques
AKIR ALI
GSM : 24 96 24 30

Exercice n°1 (3 points)

Cocher la réponse exacte.

1°) Soit pour tout $x > 1$, $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1-x}$. Alors $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = ...$

$\boxed{a}$ 0 $\boxed{b}$ $+\infty$ $\boxed{c}$ $-\infty$

2°)Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln(\ln(x))}{x^2 - 3ex + 2e^2}$. Alors $\lim\limits_{x \to e} g(x) = ...$

$\boxed{a}$ e^2 $\boxed{b}$ $\dfrac{1}{e^2}$ $\boxed{c}$ e

3°)Soit $h : x \mapsto \dfrac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$. Alors $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = ...$

$\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ $+\infty$ $\boxed{c}$ $-\infty$

Exercice n°2 (3 points)

On utilisant l'intégrale :

1°)Déterminer le volume du cylindre de rayon R et de hauteur h

2°)Déterminer le volume d'icône de rayon R et de hauteur h

3°)Déterminer le volume d'une sphère de rayon R et de hauteur h

Exercice n°3 (6 points)

On considère la parabole ζ définie dans un repère orthonormal par la relation $y^2 = 4x$

1°)Déterminer son foyer F , et une équation de sa directrice D .

2°)Soit $M(x_0, y_0)$ et $M'(x'_0, y'_0)$ des points de la parabole ζ .

a) Montrer que le corde $[MM']$ contient le foyer F si et seulement si $y_0 y'_0 = 4$

b) Déterminer alors l'ensemble ξ des points I tel que I est les milieux des cordes $[MM']$ qui contiennent le foyer F.

c) Construire ξ .

d) Montrer que $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FM'} = 1$

e) Montrer que les tangentes en M et M' sont perpendiculaires.

3°)Soit A et B deux points de la parabole ζ telles que le triangle AOB est rectangle en O.

Montrer que les cordes $[AB]$ passent par un même point fixe

Exercice n°3 (8 points)

Partie I

A)Soit f une fonction définie , continue , deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $x_0 \in]a, b[$ et pour tout x de $[a, b]$, $k(x) = f(x) - \dfrac{(x-a)(x-b)f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}$

1°) Vérifier que $k(a) = k(b) = k(x_0) = 0$ et en déduire qu'il existe deux réels $\eta \in]a, x_0[$ et $\eta' \in]x_0, b[$ tel que $k'(\eta) = k'(\eta') = 0$

2°)En déduire qu'il existe un réel $\varepsilon \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x_0 - a)(x_0 - b)$

B)Soit g une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ telle qu'il existe deux nombres réels m et M tels pour tout réel x de $[a,b]$ on ait : $m \le g''(x) \le M$

Soit pour tout x de $[a,b]$, $h(x) = g(x) - g(a)\frac{x-b}{a-b} - g(b)\frac{x-a}{b-a}$

1°)Vérifier que h(a) = h(b) = 0 .

En déduire que : $\frac{(x-a)(x-b)}{2}M \le h(x) \le \frac{(x-a)(x-b)}{2}m$

3°) Vérifier que $\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{(a-b)^3}{6}$.

En déduire que : $M\frac{(a-b)^3}{12} \le \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2}\left(g(a)+g(b)\right) \le m\frac{(a-b)^3}{12}$ (*)

Partie II

1°)On appliquant l'inégalité (*) à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer la relation :

$$\frac{1}{12(n+1)^2} \le \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) \le \frac{1}{12n^2}$$

2°)On pose pour tout entier n non nul, $u_n = \ln\left(e^{-n} n^n \sqrt{n}\right) - \ln(n!)$ et pour tout entier $n \ge 2$,

$v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}$

a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

c) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$, $\ell - \frac{1}{12(n-1)} \le u_n \le \ell$.

3°)On pose pour tout entier n de N : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$

a) Vérifier que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$

b) Montrer le suites (I_n) est décroissante sur N.

c) Montrer que pour tout entier $n \ge 2$: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

d) En déduire que pour tout n de N : $I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

e) Montrer que $\pi = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2 n}$

f) En déduire que $\ell = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$