MATH AKIR

SEMAINE DES SUITES REELLES ORIGINAL (AKIR ALI)

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

♣ *Exercice n°03*

On considère la suite U *définie par* $U_0 = 1$ *et* $\forall n \in N$: $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 2}{U_n + 2}$

1. *Montrer que pour tout* n *de* N : $1 \leq U_n < \sqrt{2}$.
2. *Etudier la monotonie de* U.
3. *Montrer que* U *est convergente et calculer sa limite.*
4. *Montrer que pour tout* n *de* N : $\sqrt{2} - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - U_n\right)$
5. *En déduire que pour tout* n *de* N ; $\sqrt{2} - U_n \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$. *Retrouver* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$
6. *Soit pour tout* n *de* N^* : $S_n = \dfrac{1}{n}\left(U^2{}_1 + U^2{}_2 + \ldots + U^2{}_n\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U^2{}_k$.

a. *Montrer que* (S_n) *est croissante.*

b. *Soient* n *et* p *deux entiers naturels tel que* $n > p > 1$.

Montrer que : $(p-1)S_{p-1} + (n-p+1)U_p^2 \leq nS_n \leq nU_n^2$

c. *En déduire que* (S_n) *est convergente* (*on note* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$)

d. *Montrer que pour tout* $p > 1$: $U_p^2 \leq \ell \leq 2$. *En déduire la valeur de* ℓ .