Séries d'exercices $3^{ème}$ **Maths**
PRODUIT SCA-VECTORIELLE

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : http://maths-akir.midiblogs.com/

EXERCICE N°1

Dans l'espace ξ , rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On considère les points A(0,,1,-1) , B(3,2,1) et C(2,0,2).

1°)Vérifier que ABC est un triangle isocèle.

2°)Calculer $\cos\left(B\hat{A}C\right)$

3°)Soit P l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CA}$.

Montrer que P est le plan médiateur du segment [BC].

EXERCICE N°2

Dans l'espace ξ , rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On considère les points A(m+1,2m-3,2-2m) , B(3,1,-2) ,C(4,0,2) et D(1,3,0) ; où m est un réel.

1°)Déterminer m pour que ABC soit un triangle rectangle en A.

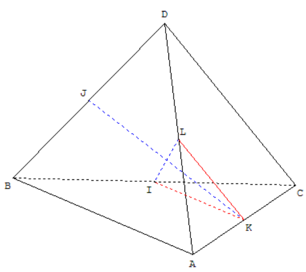
2°)Déterminer m pour que A appartienne au plan médiateur de [BC].

3°)Vérifier que les points B , C et D ne sont pas alignés.

4°)Déterminer m pour que (AC) soit perpendiculaire au plan (BCD).

EXERCICE N°3

Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K et L les milieux de [BC], [BD], [CA] et [DA].



1°) Exprimer $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

3°) Montrer que les droites (LI) et (KJ) sont orthogonales si et seulement si :
AB = CD.

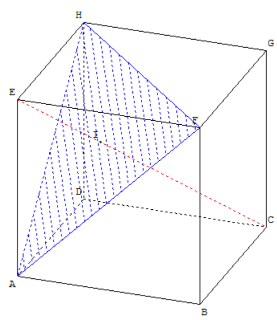
EXERCICE N°4

On considère quatre points distincts A, B, C et D de l'espace.

1°)Exprimer AC^2 - AD^2 et BC^2 - BD^2 sous la forme de produits scalaires.

2°) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si
$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

3°) Application:on suppose que le tétraèdre ABCD soit tel que les arêtes (AB) et (CD) soient orthogonales ainsi que les arêtes (BC) et (AD).Montrer alors qu'il en est de même des arêtes (BD) et (AC).



EXERCICE N°5

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur a (a réel strictement positif).

Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

Montrer que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (AFH).

EXERCICE N°6

Soit ABCD un tétraèdre régulier (les 6 arêtes sont égales et valent c).

1°) Démontrer que (AB) est orthogonal à (CD).

2°) Démontrer que la droite(IJ), qui joint les milieux des côtés [AB]et [CD] est perpendiculaire à (AB) et (CD).

3°) Calculer la hauteur du tétraèdre en fonction de c.

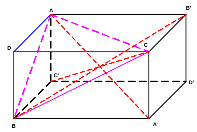
EXERCICE N°7

Soient ABCD quatre points de l'espace et soient MNPQ les milieux respectifs des segments [AB], [BC] ,[DC]et [DA].

Démontrer que : $2\left(MP^2+NQ^2\right)=AC^2+BD^2$

EXERCICE N°8

On considère un parallélépipède dont DA, DB, DC sont des arêtes et AA', BB', CC' des diagonales.



Montrer que $AA'^2+BB'^2+CC'^2=BC^2+CA^2+AB^2+DA^2+DB^2+DC^2$

EXERCICE N°9

Déterminer la construction de la base $B=\left(\vec u,\vec v,\vec w\right)$ *tel que* $\left(O,\vec u,\vec v,\vec w\right)$*soit un repère orthogonal direct.*

a) $\vec w\,\bullet \quad \xrightarrow{\vec u}$ b) $\xleftarrow{\vec v}\quad \circ\,\vec u$ c) $\xleftarrow{\vec v}\uparrow \vec w$

($\vec X\,\bullet$ *vecteur entrant* , $\circ\,\vec X$ *vecteur sortant*)

EXERCICE N°10

Soient $\vec u$ *et* $\vec v$ *deux vecteurs unitaires et orthogonaux.*

1°)Déterminer les vecteurs : $\left(\vec v\wedge\vec u\right)\wedge\vec u$, $\left(\vec v\wedge\vec v\right)\wedge\vec u$ *et* $\left(\vec v\wedge\left(\vec u\wedge\vec v\right)\right)\wedge\vec u$.

2°)Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec w$ *tels que l'on a* $\left(\vec v\wedge\vec w\right)\wedge\vec u=\vec 0$

EXERCICE N°11

Soient A , B , C trois points de l'espace. Démontrer les égalités : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}$

EXERCICE N°12

Soit ABC un triangle isocèle, rectangle en A.

1°)Prouver sans calcul, que le vecteur $\vec u=\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}\right)\wedge\overrightarrow{AC}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{AB}$ *et que le vecteur* $\vec v=\overrightarrow{BC}\wedge\left(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2°)Déterminer les vecteurs $\vec u$ *et* $\vec v$.

3°)Le produit vectoriel est-il une opération associative ?.

EXERCICE N°13

Dans l'espace ξ, *rapporté à un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec i,\vec j,\vec k\right)$.

Soient $\vec u$, $\vec v$,$\vec w$ *les vecteurs définis par :* $\vec u=\frac{1}{2}\left(\vec i-\sqrt{3}\,\vec j\right)$, $\vec v=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}\,\vec i+\sqrt{2}\,\vec j-2\sqrt{2}\,\vec k\right)$

et $\vec w=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}\,\vec i+\sqrt{2}\,\vec j+2\sqrt{2}\,\vec k\right)$

1°)Démontrer que $\left(\vec u,\vec v,\vec w\right)$ *est un base orthonormal.*

2°)Cette base est-elle direct ou indirect ?.

EXERCICE N°14

Soit un tétraèdre ABCD et H le pied de la hauteur issue de A, dans le triangle ABC.

1°)Montrer que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{HA}$

2°)Montrer que $\left|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}\right| = \left\|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD})\right\|.\left\|\overrightarrow{HA}\right\|$

3°)En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égale $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD})\overrightarrow{BA}\right|$

4°)Application : Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *un repère orthonormé direct.*

Calculer le volume du tétraèdre ABCD avec A(-2,3,4), B(0,-1,1), C(2,0,-4) et D(-3,5,0).

EXERCICE N°15

On considère une droite D de repère $(B,\vec{u})$ *et un point* $A \notin D$ *.Soit H le projeté orthogonal de A sur D.*

1°)Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}$

2°)En déduire que $AH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

3°) Application : Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *un repère orthonormé direct.*

Calculer la distance de point A(-2,3,4) à la droite (BC) tel que B(0,-1,1) et C(1,2,1)