Séries d'exercices *4ème sciences*

PRIMITIVES

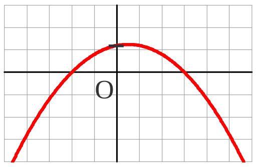
MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

EXERCICE N°1

La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.

$(\|\vec{i}\| = 1 \ ; \ \|\vec{j}\| = 5)$



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f . Laquelle ? (justifier la réponse)

Figure 1

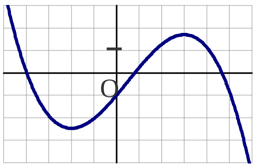


Figure 2

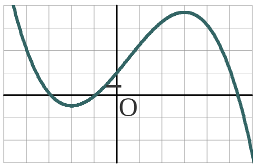
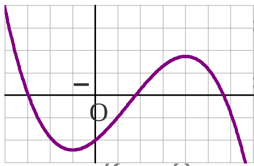


Figure 3



EXERCICE N°2

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $I = R$

2°) $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1)$; $I = R$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4°) $f : x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1)$; $I = R$

5°) $f : x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = R$

6°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1,1[$

7°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0,\pi[$

8°) $f : x \mapsto \cos x.\cos 2x$; $I = R$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{x\cos x + \sin x}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$

10°) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2,0[$

EXERCICE N°3

1°)Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^2 = a.(x-1)^2 + b.(x-1) + c$.

2°) En déduire les primitives de f sur R tel que $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x.\cos x$.

1°)Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur R par : $g(x) = x.\sin x$.

2°)En déduire une primitive de f sur R

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = a\cos x + b\cos^3 x$ *où a et b deux réels .*

1°)Calculer $f'(x)$ *et* $f''(x)$

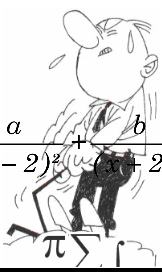
2°)Comparer $f(x)$ *et* $f''(x)$ *En déduire les primitives de f dans R .*

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$

1°)Prouver qu'il existe deux réels a et b telles que : pour tout x de $R - \{-2,2\}$ *: on ait :* $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

2°)Déduire les primitives sur $]-2,2[$ *de f .*



EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[par : $f(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Déterminer les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle I =]-∞ ; 2[: $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$

2°) En déduire la primitive de f sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[qui s'annule en x = 1.

EXERCICE N°8

1°)Déterminer une primitive sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ *de la fonction :* $x\mapsto\dfrac{1}{\cos^2 x}$

2°)On considère le fonction G, définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ *par :* $G(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$*, et que :* $G'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$

3°)En déduire une primitive, sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$*, de la fonction :* $f : x\rightarrow\dfrac{1}{\cos^4 x}$

EXERCICE N°9

Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$ *par :* $f(x) = (x^2+x+1)\sqrt{3-2x}$

1°)Montrer que : $x^2=\dfrac{(3-2x)^2}{4}-\dfrac{3(3-2x)}{2}+\dfrac{9}{4}$

2°)Déterminer alors le primitive de f dans $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right[$ *qui s'annule en 1*

EXERCICE N°10

Soit F la fonction définie sur]-∞ ; 1] par : $F(x)=x\sqrt{1-x}$

1°) a) Montrer que F est dérivable sur]-∞ ; 1[et étudier la dérivabilité de F en 1.
b) Calculer F'(x) pour tout x de]-∞ ; 1[.

2°) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur]-∞ ; 1[par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3°) Soit h la fonction définie sur]-∞ ; 1[par : $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

a) Exprimer h(x) en fonction de F'(x) et de g(x).
b) En déduire une primitive H de h sur]-∞ ; 1[.
c) Déterminer la primitive H_0 *de h s'annulant en x = -3.*

EXERCICE N°11

1°)Montrer que la fonction $f : x\rightarrow\dfrac{1}{1+x^2}$ *admet des primitives sur R.*

On notera alors F la primitive de vérifiant F(0)=0.
2°)Etudier la parité de F et préciser le sens de variations de F sur R.
3°)Etudier les variations de la fonction sur $]0,+\infty[$

4°)En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout x > 0 , on ait : $F(x)=c-F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

5°)Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=c$

6°)On pose, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=\tan x$.

a- Montrer que la fonction $\varphi : x\mapsto F\circ g(x)-x$ *est dérivable sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$*, et calculer* $\varphi'(x)$.

b- En déduire que, pour tout x de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F\circ g(x)=x$.

c- *Déterminer alors* $F(1), F(\sqrt{3})$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d- *Montrer que* $c = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°12

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1°) a) Calculer la limite de f en +∞.
b) Etudier les variations de f sur [0 ; +∞[et dresser son tableau de variations.
2°) Soit F la primitive de f sur [0 ; +∞[telle que F(0) = 0. On ne cherchera pas à exprimer F(x).
a) Pourquoi peut-on affirmer l'existence de F sur [0 ; +∞[?
b) Quelles sont les variations de F sur [0 ; +∞[?

3°) On définit sur [0 ; +∞[les fonctions H et K par $H(x) = F(x) - x$ *et* $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a) Etudier, sur [0 ; +∞[, les variations de H et K.

b) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, *on a :* $\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$.

c) En déduire la limite de F en +∞.
4°) a) Démontrer que l'équation $F(x) = \pi$ *admet une solution unique* α *sur [0 ; +∞[.*

b) Montrer que l'on peut préciser : $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$.

EXERCICE N°13

Soit f la fonction définie sur]-1 ; 1[par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *F la primitive de f sur]-1 ; 1[qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $g(x) = F(\sin x)$.

Démontrer que $g'(x) = 1$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *et en déduire que* $F(\sin x) = x$ *pour tout x de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.