Fiche n°4 : Suite périodique

Pré-requis : Définition d'une suite réelle (***Fiche n°1***)
Principe de raisonnement par récurrence (***Fiche n°2***)
Utilisation de $\sum$ (***Fiche n°3***)

Soit U une suite définie sur ℕ.

Définition: Une suite réelle est **périodique** si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$, pour tout n de ℕ, $U_{n+p} = U_n$.

Parfois, cette propriété n'est vraie qu'à partir d'un certain rang, et la suite est alors dite **ultimement périodique**.
Une suite (ultimement) périodique de période 1 est dite **stationnaire**.

- ***Exemple 1*** : $U_n = (-1)^n$, U est une suite périodique de période 2,

En effet : $U_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^2 \times (-1)^n = 1 \times (-1)^n = U_n$

- ***Exemple 2*** : $U_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$, U est une suite périodique de période 8,

En effet : $U_{n+8} = \cos\left(\frac{(n+8)\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{8} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{8}\right) = U_n$

Proposition : Soit U une suite réelle est **périodique,** de période p, alors pour tout n et k de ℕ : $U_{n+pk} = U_n$.

- ***Exemple 3*** : On prend même *exemple 2* et on demande de calculer U_{1604}

Comme U est périodique**,** de période 8, alors $U_{1604} = U_{4+8\times 200} = U_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Démonstration : Par récurrence

Soit $k \in \mathbb{N}$. Considérons la propriété $\wp_k$: « $U_{n+pk} = U_n$ »

Initialisation : Pour $k = 0$, $U_{n+pk} = U_{n+0} = U_n$ donc $\wp_0$ est varie.

Hérédité : Supposons la propriété $\wp_k$ est vraie pour un rang k quelconque.

Nous allons montrer que $\wp_{k+1}$ est vraie.

On a : $U_{n+p(k+1)} = U_{\underbrace{n+pk}_{=N}+p} = U_{N+p} = \underbrace{U_N}_{U \text{ est } p-\text{périodique}} = U_{n+pk} = \underbrace{U_n}_{\text{hypothèse de récurrence}}$ et par suite la propriété $\wp_{k+1}$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence $\wp_k$ est vraie pour tout k de ℕ

Exercice 01 : Soit la suite réelle (U_n) définie sur ℕ* par : $U_1 = \frac{1}{2}$, et $U_{n+1} = \frac{(-1)^n}{U_n}$. Calculer U_{2021} .

On a $U_2 = -2\,; U_3 = -\frac{1}{2}\,; U_4 = 2\,; U_5 = \frac{1}{2}\,; U_6 = -2\,; U_7 = -\frac{1}{2}\,; U_8 = 2$

On remarque que U est une suite périodique de période 4

En effet , pour tout n de ℕ, $\left[U_{n+4} = \frac{(-1)^{n+3}}{U_{n+3}} = \frac{(-1)^{n+3}}{(-1)^{n+2}} U_{n+2} = -\frac{(-1)^{n+1}}{U_{n+1}} = U_n \right]$ alors $U_{2021} = U_{1+4\times 505} = U_1 = \frac{1}{2}$.

Fiche n°4 : Suite périodique

Exercice 02 : Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_0 \in [0,3]$ et $V_{n+1} = |V_n| - 1$.

Montrer que (V_n) est périodique à partir d'un certain rang.

On a : $V_1 = V_0 - 1$. Distinguons deux cas :

- **Cas n°1 :** $0 \le V_0 \le 1$

On a $V_2 = -V_0$ alors $V_3 = V_0 - 1 = V_1$

Donc (V_n) est une suite périodique de période 2 à partir de $n_0 = 1$

- **Cas n°2 :** $1 < V_0 \le 3$

On a $V_2 = V_0 - 2$: Distinguons deux cas :

  - ***Cas n°2.1 :*** $1 < V_0 \le 2$

On a $V_3 = -V_0 + 1$ alors $V_4 = V_0 - 2 = V_2$

Donc (V_n) est une suite périodique de période 2 à partir de $n_0 = 2$

  - ***Cas n°2.2 :*** $2 < V_0 \le 3$

On a $V_3 = V_0 - 3$, $V_4 = 2 - V_0$, $V_5 = V_0 - 3 = V_3$

Donc (V_n) est une suite périodique de période 2 à partir de $n_0 = 3$.

Exercice 03 : On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1, U_1 = \frac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = U_{n+1} - U_n$

Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_{2020}$

On a : $U_0 = 1, U_1 = \frac{1}{2}, U_2 = -\frac{1}{2}, U_3 = -1, U_4 = -\frac{1}{2}, U_5 = \frac{1}{2}, U_6 = 1, U_7 = \frac{1}{2}, U_8 = -\frac{1}{2}, U_9 = -1...$

On remarque que U est une suite périodique de période 6

En effet, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+6} = U_{n+5} - U_{n+4} = \underbrace{(U_{n+4} - U_{n+3})}_{U_{n+5}} - \underbrace{(U_{n+3} - U_{n+2})}_{U_{n+4}}$

$$= \underbrace{\left(\overbrace{U_{n+3} - U_{n+2}}^{U_{n+4}} - U_{n+3}\right)}_{U_{n+5}} - \underbrace{(U_{n+3} - U_{n+2})}_{U_{n+4}}$$

$$= -U_{n+3} = U_{n+1} - U_{n+2}$$

$$= U_{n+1} - \underbrace{(U_{n+1} - U_n)}_{U_{n+2}} = U_n$$

Alors pour tout n et k de $\mathbb{N}$, $U_{n+6k} = U_n$

Donc $S = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{336} U_{6k} + \sum_{k=0}^{336} U_{6k+1} + \sum_{k=0}^{336} U_{6k+2} + \sum_{k=0}^{336} U_{6k+3} + + \sum_{k=0}^{336} U_{6k+4} + \sum_{k=0}^{335} U_{6k+5}$

$$S = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{336} U_0 + \sum_{k=0}^{336} U_1 + \sum_{k=0}^{336} U_2 + \sum_{k=0}^{336} U_3 + \sum_{k=0}^{336} U_4 + \sum_{k=0}^{335} U_5$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{336} (U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4) + \sum_{k=0}^{335} U_5$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{336} \left(-\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=0}^{335} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{335} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Nom du document : Fiche n°4 suite périodique corrigé - Copie.docx
Répertoire : C:\Users\user\Desktop\fiche olymiade\akir a
Modèle : C:\Users\user\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Titre :
Sujet :
Auteur : ALI AKIR
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 22/02/2017 04:27:00
N° de révision : 31
Dernier enregistr. le : 12/08/2017 21:01:00
Dernier enregistrement par : user
Temps total d'édition : 90 Minutes
Dernière impression sur : 12/08/2017 21:07:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 2
Nombre de mots : 646 (approx.)
Nombre de caractères : 3 553 (approx.)