

Soit (u_n) une suite réelle définie pour tout entier $n \geq n_0$

Variation d'une suite .

- *) La suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- *) La suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.
- *) La suite (u_n) est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante soit décroissante.

Méthode

- 1°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$
- 2°) Pour une suites à termes positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 .

3) Dans le cas où $u_n = f(n)$ avec f une fonction définie sur $[n_0, +\infty[$.

Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.

Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Attention : le réciproque est fausse.

Suite majorée, minorée et bornée.

- *) La suite (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0 : u_n \leq M$
- *) La suite (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0 : u_n \geq m$
- *) La suite (u_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Suite convergente- diverge

*) On dit que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$

*) Si (u_n) converge vers ℓ alors ce réel est unique.

Notation : (u_n) converge vers ℓ , in écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

*) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$ alors il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \neq 0$

*) Une suite qui ne converge pas est dite divergence.

*) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ signifie, si pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n > A$

*) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ signifie, si pour tout $A < 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n < A$

Limite d'une suite définie par $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur $]a, +\infty[$, soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

*) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Opérations sur les limites

*) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (au_n + bv_n) = a\ell + b\ell'$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell\ell'$

*) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$

*) Soit une suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ telle que $u_n > 0$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

*) Soit une suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ telle que $u_n < 0$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

Théorème d'encadrement

*) Si $\begin{cases} \exists p \in \mathbb{N} / n \geq p : |u_n| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$



$$*) \text{Si } \begin{cases} \exists p \in \mathbb{N} / n \geq p : u_n \geq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

$$*) \text{Si } \begin{cases} \exists p \in \mathbb{N} / n \geq p : u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

$$*) \text{Si } \begin{cases} \exists p \in \mathbb{N} / n \geq p : v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$$

Suite arithmétique – Suite géométrique

| *** Suite arithmétique (s.a) *** | *** Suite géométrique (s.g) *** |
|--|---|
| $u_{n+1} = u_n + r$ | $v_{n+1} = qv_n$ |
| $u_n = u_0 + nr$ | $v_n = v_0 q^n$ |
| $u_p = u_s + (p-s)r$ | $v_p = v_s q^{p-s}$ |
| $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \Rightarrow u$ non s.a | $\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0} \Rightarrow v$ non s.g |
| $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$ |
| <ul style="list-style-type: none"> • $\sum_{k=0}^n x = \overbrace{x+x+\dots+x}^{n+1 \text{ fois } x} = (n+1)x$ • $\sum_{k=0}^n k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ • $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ • $\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$ | <p>pour tout $q \in \mathbb{R}^* - \{1\}$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ • $\sum_{k=p}^n q^k = q^p + q^{p+1} + \dots + q^n = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q}$ |

