MATH AKIR

SEMAINE DES SUITES REELLES ORIGINAL (AKIR ALI)

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

♣ *Exercice n°02*

. *Soit a un réel strictement positif.*

On considère la suite U définie sur N^* *par* $U_1 \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$ *et* $U_{n+1} = U_n - \frac{U_n^2}{a}$

1. *Montrer que pour tout n de* N^* : $0 < U_n < \frac{a}{2}$.
2. *Montrer que U est convergente et calculer sa limite.*
3. *Soit pour tout n de* N^* : $V_n = nU_n$
   a. *Montrer que pour tout n de* N^* : $V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{a}{n+1} - U_n\right)U_n$
   b. *Montrer que pour tout n de* N^* : $U_n < \frac{a}{n+1}$
   c. *En déduire que V est convergente . On note* ℓ *sa limite.*

d. *Montrer que :* $0 < \ell \leq a$.

4. *Soient pour tout n de* N^* : $W_n = \dfrac{1}{a - U_n}$ *et* $H_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$

a. *Montrer que W est décroissante .*

b. *Vérifier que pour tout n de* N^* : $W_n = \dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n}$

c. *En déduire que* $H_n = \dfrac{n+1}{nV_{n+1}} - \dfrac{1}{nU_1}$

d. *Vérifier alors que* $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = \dfrac{1}{\ell}$

e. *Montrer que pour tout n de* N^* : $W_{2n} \leq 2H_{2n} - H_n \leq W_{n+1}$

f. *En déduire que :* $\ell = a$