SERIES D'EXERCICE N°1
NOMBRES REELS

EXERCICE 01

Soient A et B deux parties non vides de R.

1°)On suppose $A \subset B$.

- *a- Montrer que si A n'est pas majorée alors B aussi.*
- *b- On suppose B bornée ; comparer supA et supB et infA et infB.*

2°)On suppose A et B bornées.

- *a- On pose* $A + B = \{a + b, \quad a \in A; \quad b \in B\}$.*Montrer que A+B admet une borne supérieure et que* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
- *b- Montrer que* $A \cup B$ *admet une borne supérieure et que* $\sup(A \cup B) = \sup(\sup A, \sup B)$.
- *c- Montrer que* $A \cup B$ *admet une borne inférieure et que* $\inf(A \cup B) = \inf(\inf A, \inf B)$.
- *d- Montrer que* $A + B$ *admet une borne inférieure et que* $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

3°)Soient A et B deux parties non vide et bornées de R_+^*.*On pose* $AB = \{ab; \quad a \in A, \quad b \in B\}$.

- *a- Justifier l'existence de* $\sup(AB)$.
- *b- Montrer que supA > 0 et infA ≥ 0.*
- *c- Montrer que* $\sup(AB) = \sup A . \sup B$

4°)Soit A une partie non vide et bornée de R_+^*. *On pose* $A^{-1} = \{a^{-1}, \quad a \in A\}$.

- *a- Montrer que* A^{-1} *admet une borne inférieure et que* $\inf\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\sup A}$.
- *b- On suppose que infA>0. Montrer que* A^{-1} *admet une borne supérieure, donner une relation entre* $\sup\left(A^{-1}\right)$ *et infA.*

5°)Soient A une partie bornée non vide de R et $D = \{|x - y|, \quad (x, y) \in A^2\}$

- *a- Montrer que D admet une borne supérieure dans R.(on note par* d(A)*, ce nombre s'appelle le diamètre de A).*
- *b- Montrer que* $d(A) = \sup A - \inf A$.

EXERCICE 02

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Donner lorsqu'ils existent le plus petit et le plus grand élément, la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

$A = [1,2[$, $B =]-\infty, 1]$, $C = \{a + bn \quad / n \in N\}$, $D = \{a + b(-1)^n \quad / n \in N\}$, $E = \left\{a + \dfrac{b}{n} \quad / n \in N^*\right\}$,

$F = \left\{a(-1)^n + \dfrac{b}{n} \quad / n \in N^*\right\}$, $G = \left\{\sin\left(\dfrac{2n\pi}{7}\right) \quad / n \in Z\right\}$, $H = \{f(x) = x - E(x) \quad / x \in R\}$

EXERCICE 03

Soit f une application croissante de $[0,2]$ *sur* $[0,2]$. *Soit* $A = \{x \in [0,2] \quad \text{tels que} \quad f(x) \le x\}$.

1°)Montrer que A admet une borne inférieure α.

2°)Montrer que si $x \in A$ *alors* $f(x) \in A$.

3°)Montrer que $\alpha \in A$ *puis* $f(\alpha) = \alpha$.

EXERCICE 04

Soient $a \in Q$ *et* $A = \{x \in Q \quad / \quad a < x\}$. *Montrer que A n'a pas de plus petit élément.*

EXERCICE 05

Montrer que $A = \{x \in Q_+ \quad / \quad x^2 < 2\}$ *n'admet pas de borne supérieure dans Q.*

EXERCICE 06

Montrer qu'il n'existe aucune application f de N dans N telle que : $\forall x \in N,\ f \circ f(x) < f(x)$.

EXERCICE 07

1°)Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0; \quad |x| \le \varepsilon) \Leftrightarrow (x = 0)$.

2°)Soient x et y deux réels. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0; \quad x - y \le \varepsilon) \Leftrightarrow (x \le y)$.

EXERCICE 08

1°)Montrer que : $\forall n \in N^*,\ \forall x \in R$ *on a :* $0 \le E(nx) - nE(x) \le n - 1$

2°) Montrer que : $\forall (x,y) \in R^2$ *on a* $E(x+y) \ge E(x) + E(y)$.

3°) Montrer que : $\forall (x,y) \in R^2$ *on a* $E(x-y) \le E(x) - E(y)$.

4°) Montrer que : $\forall n \in N^*,\ \forall x \in R$ *on a :* $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

EXERCICE 09

1°)Soit m un paramètre réel. Résoudre dans R l'équation : $E(x+m) = E(x)$.

2°)Résoudre dans R : $E(3x) = E(2x) + 1$

EXERCICE 10

Soit x un nombre irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ *est un nombre irrationnel .*

EXERCICE 11

Soit A une partie non vide de R, majoré. Soit M un majorant de A.

Montrer que : $M = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists (x_n)_n \subset A \quad / \quad \lim_{n\to\infty} x_n = M\right)$

EXERCICE 12

Soit $T = \left\{x \in R, \quad / \exists (m,n) \in Z \times N, \quad x = \dfrac{m}{3^n}\right\}$. *Montrer que A est dense dans R.*

Indications :

1°)Soient a et b deux réels tels que a < b. Montrer qu'il existe un entier p tel que $\dfrac{1}{3^p} < b - a$.

2°)Soit $q = E(3^p a)$. *Montrer qu'on a :* $a \le \dfrac{q+1}{3^p} \le b$. *Conclure.*

EXERCICE 13

Montrer que $\{r^{2007}, \quad r \in Q\}$ *est dense dans R.*

EXERCICE 14

1°)Déterminer $\overline{Q}$, $\overline{R - Q}$ *et* $\overset{\circ}{Q}$.

2°)Etablir : $X \subset Y \subset R \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$ *et* $\overset{\circ}{X} \subset \overset{\circ}{Y}$.

3°)Soient A et B deux parties de R : Montrer que :

$$\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{(A^c)},\ \left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{\left(A^c\right)},\ \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cup B)},\ \overline{(A \cap B)} \subset \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right),\ \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{(A \cap B)} \text{ et } \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}.$$