Avec le soutien de :

Proposé par : Ali AKIR E-mail : akir.cm@gmail.com

Exercice 1 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit p un entier premier tel que n divise $p-1$ et p divise n^3-1.

Solution 1 Prouver que $4p-3$ est un carré parfait.

On a $n|(p-1)$ alors $n \leq p-1$ et comme $p|(n^3-1)$ alors $p|(n-1)$ ou $p|(n^2+n+1)$ (p est un nombre premier)

Si $p|(n-1)$ alors $p \leq n-1$ et comme $n \leq p-1$ alors $n+1 \leq p \leq n-1$ qu'est impossible.

Si $p|(n^2+n+1)$ et comme $n|(p-1)$ alors il existe sur $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $p = nk+1$

Alors $p|(n^2+n+1)-(nk+1)$ c-à-dire $p|n(n-k+1)$ donc $p|(n-k+1)$ si non $p|n$ c-à-dire $n+1 \leq p \leq n$ qu'est impossible.

On a distinguons deux cas :

Cas n°1 $n-k+1 \neq 0$, alors $n+1 \leq p \leq n-k+1$ qu'est impossible.

Cas n°2 $n-k+1 = 0$ alors $p = nk+1 = n(n+1)+1 = n^2+n+1$ donc $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (1+2n)^2$

Exercice 2 : Trouver tous les entiers naturels n et x tel que $1+5\times 2^n = x^2$.

Solution 2 On a $5\times 2^n = (x-1)(x+1)$

$PGCD(x-1, x+1) = PGCD(x-1, x+1-(x-1)) = PGCD(x-1, 2) \in \{1,2\}$

Alors

Cas 1 : $x-1=5$ et $x+1=2^n$ alors $x=6$ et $7=2^n$ qu'est impossible

Cas 2 : $x-1=2^n$ et $x+1=5$ alors $x=4$ et $3=2^n$ qu'est impossible

Cas 3 : $x-1=10$ et $x+1=2^{n-1}$ alors $x=11$ et $12=2^{n-1}$ qu'est impossible

Cas 4 : $x-1=2^{n-1}$ et $x+1=10$ alors $x=9$ et $8=2^{n-1}$ donc $n=4$

Conclusion : $(n,x)=(4,9)$

Exercice 3: Existe t-il un nombre premier p tel que $16p+1$ est le cube d'un entier positif.

Solution 3 $16p+1=n^3$ alors $16p=(n-1)(n^2+n+1)$

$$PGCD(n-1, n^2+n+1) = PGCD(n-1, n^2+n+1-n(n-1))$$
$$= PGCD(n-1, 2n+1) = PGCD(n-1, 2n+1-2(n-1)) = PGCD(n-1, 3) \in \{1,3\}$$

On a distinguons deux cas :

Cas 1 : $PGCD(n-1, 3)$ alors $3|16p$ donc $3|p$ qui implique $p=3$ et $16p+1=49$ qui n'est pas un cube d'un entier positif.

Cas 2 : $PGCD(n-1, 3)=1$

Si $p=2$ pas de solution

Si $p>2$ et comme n^2+n+1 est un entier impair alors $n-1=16$ et $n^2+n+1=p$ alors $n=17$ et $p=307$ est un nombre premier