Fiche de cours $4^{ème}$ *inf*

NOMBRES COMPLEXES

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

Propriétés : *Soit M un point d'affixe* $z = a + ib, \quad a,b \in R$

$i^2 = -1$	$z = a + ib, \quad a,b \in R$	$Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$	$Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$
$z \in R \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z$	$z \in iR \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$	$\lvert z\rvert = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$	$z \times \bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$z = 0 \Leftrightarrow Re(z) = Im(z) = 0$	$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}$	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
$Aff\left(\overrightarrow{AB}\right) = z_B - z_A$	$I = A * B \Leftrightarrow \quad z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$	$Aff\left(a\vec{u} + b\vec{v}\right) = aAff\left(\vec{u}\right) + bAff\left(\vec{v}\right)$	
$\vec{u} // \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z_{\vec{u}}} \times z_{\vec{v}} \in R$		$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z_{\vec{u}}} \times z_{\vec{v}} \in iR$	

Propriétés : *Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier n on a :*

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z'}$	$\overline{z^n} = \left(\bar{z}\right)^n$
$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}, (z \neq 0)$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)} = \dfrac{1}{\left(\bar{z}\right)^n}, (z \neq 0)$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}, (z' \neq 0)$

$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert}, (z \neq 0)$	$\left\lvert\dfrac{1}{z^n}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert^n}, (z \neq 0)$	$\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$

Théorème

L'équation az² + bz + c = 0 (a , b et complexes et a non nul) admet deux solutions dans C :

$z_1 = \dfrac{-b+\sigma}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b-\sigma}{2a}$ *où* $\Delta = b^2 - 4ac$ *et* σ *est une racine carrée de* Δ

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$	$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$	$z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

A retenir : *Soit* $z^2 = a + ib \quad ,a,b \in R$, *avec* $z = x + iy$ *alors on a* $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$

Théorème

Soit $a_0, a_1, ..., a_n$ *des nombres complexes tels que* $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Si z_0 *est un zéro de P, alors* $P(z) = (z - z_0)g(z)$, *où g(z) est se la forme* $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$, *avec* $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ *complexes.*