

EXERCICE N°1

1°) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_0 = 3i + \frac{1}{i} - 2, \quad z_1 = (1+i)^2, \quad z_2 = (1-2i)^2, \quad z_3 = \frac{1}{3+2i}, \quad z_4 = \frac{1+2i}{2-3i}, \quad z_5 = i^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

2°) Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_0 = 3i - 2, \quad z_1 = (2+i)^2, \quad z_2 = \frac{1}{5+2i}, \quad z_3 = \frac{2-i}{i+3}, \quad z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$$

EXERCICE N°2

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. On pose : $z_1 = \frac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \frac{a-ib}{a+ib}$

Montrer que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

EXERCICE N°3

Soit a, b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que $a + b + c = 1$.

Calculer $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

EXERCICE N°4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit z un nombre complexe tel que $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1°) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z^2 est un réel.

2°) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tel que $|z| = 1$.

3°) Déterminer l'ensemble H des points M d'affixe z tel que $\text{Im}(z^2) = \text{Im}(z)$.

EXERCICE N°5

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit $Z = \frac{z+1}{z-i}$ avec $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$

1°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $|Z| = 1$

2°) En déduire l'ensemble des points M , images de z , tels que $\left| \frac{\bar{z}+1}{z-i} \right| = 1$

3°) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

4°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

EXERCICE N°6

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nul d'affixe respectives z_u et z_v .

1°) Montrer que : $z_u \cdot z_v = \vec{u} \cdot \vec{v} - i \det(\vec{u}, \vec{v})$

2°) En déduire que :

i. $\vec{u} // \vec{v}$ équivaut à $z_u \cdot \bar{z}_v \in \mathbb{R}$.

ii. $\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $z_u \cdot \bar{z}_v \in i\mathbb{R}$.

3°) Application : Soit A, B et M trois points d'affixes respectives $1+i, 1$ et z .

a) Déterminer l'ensemble des points M tel que ABM est un triangle rectangle en M .

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que les points A, B et M sont alignés.

EXERCICE N°7

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Partie A : Soit z un nombre complexe et $f(z) = z^2 + z + 1$

1°) Résoudre dans \mathbb{C} l'équations : $s^2 = 2$ et $t^2 = -3$

2°) Vérifier que : $4f(z) = (2z+1)^2 + 3$



3°) Résoudre alors dans C l'équation : $f(z) = 0$.

4°) Montrer que si $f(z_0) = 0$ alors $f(\overline{z_0}) = 0$

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $f(z)$ soit un réel.

Partie B :

1°) Résoudre dans C l'équation : (E) : $z^3 = 1$. (On note par j la racine de partie imaginaire positive.)

2°) Ecrire les racines de (E) sous formes trigonométriques.

3°) Calculer j^2 et $1 + j + j^2$.

4°) Montrer que : $(a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + cj + bj^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

(avec a, b et c des nombres complexes)

5°) On considère les points A, B, C d'affixes respectifs a, b et c .

Montrer que les relations :
$$\begin{cases} a + bj + cj^2 = 0 \\ b + cj + aj^2 = 0 \\ c + aj + bj^2 = 0 \end{cases}$$
 sont équivalentes et sont conditions nécessaires et suffisantes pour

que le triangle ABC soit équilatérale.

EXERCICE N°8

Soit dans le plan complexe, les points $A(3)$, $B(-3)$ et $M(z)$ tels que : (*) : $\frac{MB}{MA} = 2$

1°) Montrer que (*) $\Leftrightarrow (z - 5)(\overline{z} - 5) = 16$.

2°) En déduire l'ensemble des points M .

EXERCICE N°9

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe non nul z , dans chacun des cas suivantes

$\arg(z) \equiv 0[2\pi]$, $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$,

$\arg(z) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$

EXERCICE N°10

Ecrire les nombres complexes suivants sous leurs formes trigonométriques.

$1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$, $-1 - i\sqrt{3}$, $1 + i$, $\frac{1}{1+i}$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$, $(1 - i\sqrt{3})^{2009}$, $\cos \frac{\pi}{11} - i \sin \frac{\pi}{11}$,

$\sin \frac{\pi}{11} + i \cos \frac{\pi}{11}$, $1 - i \tan \frac{\pi}{11}$, $1 + \cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}$

EXERCICE N°11

Soit : $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

1°) Soit $z' = (1+i)z$. Ecrire z' sous la forme cartésienne puis sous la forme trigonométrique

2°) En déduire z sous leurs formes trigonométriques.

3°) En déduire alors la valeurs de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°12

Soit : $z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$

1°) Ecrire z sous la forme trigonométrique

2°) Ecrire z sous la forme cartésienne

3°) En déduire alors la valeurs de $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°13

Soit $\varphi \in [0, \pi]$. Ecrire z sous forme trigonométrique. $z = \sin \varphi + i \cos \varphi$, $z = 1 + \cos \varphi - i \sin \varphi$, $z = \frac{1-i}{\sin \varphi - i \cos \varphi}$

EXERCICE N°14

On donne le nombre complexe $\alpha = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

1°) Exprimer α^2 sous forme algébrique

2°) En déduire α^2 sous forme trigonométriques.

3°) En déduire α sous forme trigonométriques.



4°) En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

5°) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que a^2z soit un réel.

6°) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N}^* : $a^n = (-1)^n |a|^n \left(\cos \frac{n\pi}{8} - i \sin \frac{n\pi}{8} \right)$

EXERCICE N°15

Soit z un nombre complexe. Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a , b et c des nombres complexes. Soit z_1, z_2 et z_3 sont les racines de l'équation $P(z) = 0$

1°) Montrer que $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ et $c = -z_1z_2z_3$

2°) Application 1 : Résoudre dans \mathbb{C}^3 :
$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy + yz + zx = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

3°) Applications 2 :

Déterminer les nombres complexes de modules inférieurs à 1 et vérifiant les égalités : $xyz = x + y + z = 1$.

<http://maths-akir.nidiblogs.com/>

