EXERCICE N°1 :*Soit* $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

Partie A
1°) Calculer u_1 *et* u_2 *. u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?*
2°)Montrer que : pour tout n de N : $2 \le u_n \le 5$ *.*
3°)Montrer que (u) est croissante sur N .
4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.
Partie B
On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$ *.*
1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique
2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*
4°)Soit pour tout n de N : $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ *et* $s'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

- *a- Exprimer* s_n *puis* s'_n *en fonction de n*
- *b- Calculer alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n$

EXERCICE N° 2*Soit* $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Partie A
1°)Montrer que : pour tout n de N : $0 < u_n \le 1$ *.*
2°)Montrer que (u) est croissante sur N .
3°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.
Partie B
On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$ *.*
1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique
2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N° 3 : *Soit* $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^{\ 2}}{2}} \end{cases}$

Partie A
1°)Montrer que : pour tout n de N : $u_n \ge 1$.
2°)Montrer que pour tout n de N : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n^{\ 2}}{2(u_{n+1}+u_n)}$
3°)En déduire le sens de variations de (u).
4°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.
Partie B
On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n^{\ 2} - 1$ *.*
1°)Montrer que (v) soit une suite géométrique
2°)Exprimer v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
3°)Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *.*

EXERCICE N°4 : *Soient a et b deux réels tels que* $0<a \le b$ *et* (u_n) *la suite définie par :*

$u_1=a+b$ et $\forall n\in N^*$: $u_{n+1}=a+b-\dfrac{ab}{u_n}$.

1°) On suppose que $a<b$.

(a) Montrer que (u_n) est minorée par b.

(b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) en déduire qu'elle est convergente.

2°) Soit v la suite définie par : $\forall n\in N^*$: $v_n=\dfrac{u_n-b}{u_n-a}$

(a) Montrer que v est une suite géométrique.

(b) En déduire u_n en fonction de n, a et b

(c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3°) On suppose que $a=b$.

(a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a.

(b) Exprimer alors u_n en fonction de n et a puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°5 : Soit la fonction $f:R_+\to R$, $x\mapsto f(x)=\sqrt{4+3x}$.

On considère la suite réelle u définie par $u_0=0$ et $\forall n\in N$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1°)(a) Montrer que : $\forall n\in N$: $0\le u_n\le 4$

(b) Etudier la monotonie de u.

(c) En déduire que u est convergente.

2°)(a) Montrer que : $\forall n\in N$, $|u_{n+1}-4|\le \dfrac{3}{4}|u_n-4|$

(b) En déduire : $\forall n\in N$, $|u_n-4|\le 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. En déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°6 : On définit la suite réelle (u_n) par $u_0=2$ et la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+5}{2u_n}$, pour tout $n\in N$.

On pose alors $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{5}}{u_n+\sqrt{5}}$.

1°) Montrer que, pour tout $n\in N$, $u_n>0$.

2°) Soit $n\in N$. Montrer que $v_{n+1}=v_n^2$. En déduire que $v_n=(v_0)^{2^n}$.

3°) Prouver que $v_0=\dfrac{-1}{(2+\sqrt{5})^2}$ et que $|v_0|<\dfrac{1}{16}$.

4°) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE N°7 : On considère les suites u et v définies sur N par : $u_0=v_0=0$ et pour tout n de N :

$u_{n+1}=\sqrt{3-v_n}$ et $v_{n+1}=\sqrt{3+u_n}$.

1°)Montrer que pour tout n de N on a : $0\le u_n\le 3$ et $0\le v_n\le 3$.

2°)Soient a et b deux suites définies sur N par : $a_n=u_n-1$ et $b_n=v_n-1$.

a)Montrer que pour tout n de N on a : $|a_{n+1}|\le|b_n|$ et $|b_{n+1}|\le\dfrac{1}{2}|a_n|$.

b)En déduire que pour tout n de N on a : $|a_{n+2}|\le\dfrac{1}{2}|a_n|$ et $|b_{n+2}|\le\dfrac{1}{2}|b_n|$

c)En utilisant les résultats de b/, montrer que pour tout n de n : $|a_{2p}|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^p$ et $|b_{2p}|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-1}$.

d)Étudier alors la convergence des suites (u_{2p}) et (v_{2p})

EXERCICE N°8

1°) Soit (u_n) la suite réelle définie sur N par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et pour tout n de N : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{1+u_n^2}$

(a) Montrer que pour tout n de N on a : $0<u_n<1$

(b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) Soit v la suite de terme général : $v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$

(a) Montrer que pour tout n de N on a : $v_{n+1} = v_n^2$

(b) En déduire que pour tout n de N : $v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}$

(c) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et l'expression de u_n.

(d) On pose pour tout n de N : $p_n = v_0.v_1....v_n$. Calculer p_n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{p_n}{v_{n+1}}\right)$

3°) Soit la suite s définie sur N^* par $s_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$

(a) Montrer que pour tout $n \in N^*$, on : $0 < 1-u_n < \dfrac{1}{1+u_0^2}(1-u_{n-1})$

(b) En déduire que pour tout n de N, $0 < 1-u_n < \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

(c) Montrer que pour tout n de N^* ; $1-\dfrac{5}{n}\left[1-\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right] \le s_n \le 1$. En déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

EXERCICE N° 9

Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites réelles définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+v_n}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n+u_n}{4} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et v_1 , u_2 et v_2 .
- u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?
- v est-elle une suite géométrique ? v est-elle une suite arithmétique ?

2°) On pose, pour tout entier naturel n : $x_n = u_n - v_n$.
- Montrer que (x) soit une suite géométrique
- Exprimer x_n en fonction de n.

3°)Montrer que pour tout n de N : $u_n \le v_n$

4°)Montrer que (u) est croissante sur N et (v) est décroissante sur N

5°)En déduire que pour tout n de N : $u_n \le 3$ et $v_n \ge 2$

6°)En déduire que (u) et (v) sont adjacentes .

EXERCICE N°10 On se donne deux réels a et b tels que $0 \le b \le a$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations : $u_0 = a$, $v_0 = b$, $\forall n \in N$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2}$

1°)Etablir une relation entre $u_{n+1}-v_{n+1}$ et $u_n - v_n$.

2°)En déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n , a et b .

3°)En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n , n , a et b.

4°)Montrer que les suites u et v convergent vers une limite commune que l'on déterminera.

EXERCICE N°11 On définit des suites (u_n) et (v_n) par :

$u_0, v_0 > 0$ et pour tout n de N : $u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $\dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{v_n}\right)$.

1°)Montrer que (u_n) et décroissante et (v_n) est croissante.

2°)Montrer que pour tout n de N : $u_n \ge v_n$ et $u_{n+1}-v_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$

3°)En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

EXERCICE N°12 : On considère la suite de terme générale $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1°)Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\ge1}$ et $(u_{2n+1})_{n\ge0}$ sont des suites adjacentes.

2°)Déduire que la suite $(u_n)_{n\ge1}$ est convergente.