EXERCICE N°1

Soient $z_1 = \dfrac{2009 + i2008}{2009 - i2008}$ *et* $z_2 = \dfrac{2009 - i2008}{2009 + i2008}$

Montrer que $z_1 + z_2$ *est réel et que* $z_1 - z_2$ *est imaginaire pur.*

EXERCICE N°2

Soit a , b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: a + b + c = 1.Calculer $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

EXERCICE N°3

z désigne un nombre complexe différent de 2 i.

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ *(unité graphique: 3 cm). On désigne par A le point d'affixe 2 i. A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M', d'affixe z' définie par* $z' = \dfrac{z + 2i}{z - 2i}$.

1°)Calculer l'affixe du point N' image par f du point N d'affixe $\sqrt{3} + i$.

2°) Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe 1 + i.

3°) Soit un complexe z distinct de 2 i, on pose : z = x + i y et z' = x' + i y', avec x, y, x' et y' réels.

Démontrer que : $x' = \dfrac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y-2)^2}$ *et* $y' = \dfrac{4x}{x^2 + (y-2)^2}$

4°) Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :

a) z' est réel

b) z' est de module 1

EXERCICE N°4

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Soit $Z = \dfrac{z+1}{z-i}$ *avec* $z = x + iy$ *où* $x , y \in R$

1°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $|Z| = 1$

2°)En déduire l'ensemble des points M , images de z , tels que $\left|\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}-i}\right| = 1$

3°)Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .

4°)Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.

5°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.

6°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

EXERCICE N°5

Soit : $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

1°)Soit z'= (1+i)z . Ecrire z' sous la forme cartésienne puis sous la forme trigonométrique

2°)En déduire z sous leurs formes trigonométriques.

3°)En déduire alors la valeurs de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\cos\dfrac{\pi}{12}$

EXERCICE N°6

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$.

1°)Ecrire z sous forme trigonométrique puis exponentielle .

$z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$, $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$, $z_3 = \dfrac{\sin\theta + i\cos\theta}{1 + \cos\theta + i\sin\theta}$

2°) Déterminer l'ensemble des points $M_i(z_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ *lorsque* θ *décrit* $[0, \pi[$.

EXERCICE N°7

On donne dans le plan complexe trois points M , N et P d'affixes respectives z , z^2 *et* z^3*. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels le triangle MNP est rectangle en M.*

EXERCICE N°8

Soit $z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

1°)Calculer z^2.

2°)Déterminer le module et un argument de z^2.
3°)En déduire le module et un argument de z..

EXERCICE N°9

Soit $\alpha,\beta \in R$. Montrer que : $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$ et $e^{i\alpha}-e^{i\beta}=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

EXERCICE N°10

Résoudre dans C :

1°) $z^2-2z\cos\varphi+1=0$, $\varphi\in R$; 2°) $(z-1)^6=(z-1)^3+1$;

3°) $(1-i)z^2-(5+i)z+6+4i=0$;3°) $z^5=\frac{8(1+i)}{\sqrt{3}-i}$; 4°) $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4=\frac{1+ia}{1-ia}$ où $a\in R$.

EXERCICE N°11

On considère l'équation (E) : $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0$.
1°)Montrer que (E) admet un solution imaginaire pure.
2°)Résoudre alors (E) dans C.

EXERCICE N°12

Résoudre dans C l'équation : $z^3+(2-3i)z^2-(7+i)z+17i-2=0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

EXERCICE N°13

On considère l'équation (E) : $z^4-2z^3-z^2-2z+1=0$.

1°)Vérifier que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} Z=z+\dfrac{1}{z} \\ Z^2-2Z-3=0 \end{cases}$

2°)En déduire la résolution de (E)dans C.
Exercice n°3
On considère le polynôme P défini sur C par : $P(z)=z^4+2z^3+6z^2+8z+8$.

1°) Justifier que : $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$.
En déduire que si z_0 est une racine de P, alors son conjugué est aussi une racine de P.
2°) a) Résoudre l'équation $P(z)=0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.
b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.
3°) Soient M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives $-2i$, $2i$, $-1+i$ et $-1-i$.
a) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.
b) Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.

EXERCICE N°14

Soit $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et (E_φ) l'équation : $z^2-(3\cos\varphi+1+i\cos\varphi)z+2\cos\varphi(\cos\varphi+1+i\cos\varphi)=0$

1°)Montrer que l'équation (E_φ) admet une solution réelle z_1 que l'on calculera et en déduire l'autre solution z_2.
2°)Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs z_1 et z_2.

(a) Déterminer l'ensemble des points M_1 lorsque φ décrit l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(b) Montrer que $M_1M_2^{\ 2}=\frac{1}{2}+2\left(\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)^2$.

(c) Pour quelle valeur de φ la distance entre M_1 et M_2 est maximale.

(a) Déterminer le réel φ tel que OAB soit isocèle .

EXERCICE N°15

Pour tout nombre complexe z on pose : $f(z)=z^3+2(i-\sqrt{3})z^2+4(1-i\sqrt{3})z+8i$

1°)Montrer que l'équation $f(z)=0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
2°)Résoudre alors l'équation $f(z)=0$.
On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, tel que $Im(z_1)<0$.

3°)On pose $\omega=\frac{z_1}{z_0}$. Donner la dorme trigonométrique de ω.

4°)Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixe respectives z, ωz et $\omega^2 z$.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

EXERCICE N°16

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les applications : $f : C-\{-i\} \to C-\{-i\}\ ;\ z \mapsto f(z)=\dfrac{z-1}{i(z+i)}$

et $F : \wp-\{B\} \to \wp-\{B\}\ ;\ M(z) \mapsto F(M)=M'(z'=f(z))$ où B est le point d'affixe (-i).

1°)Montrer que f est involutive (c-a-d $f \circ f = Id_{C-\{-i\}}$) et en déduire que f est bijective.

2°)(a) Vérifier que $\forall\ z \in\ C \setminus \{-i\}$, $z' + i = \dfrac{-1+i}{z+i}$.

(b)En déduire que $\forall\ M \in\ P \setminus \{B\}$, $\begin{cases} BM \times BM' = \sqrt{2} \\ \left(\vec{u},\overrightarrow{BM}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{BM'}\right) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

3°)Déterminer les images par F de la droite (D) : y=x –1 et du cercle (C) de centre B et de rayon 1 .

EXERCICE N°17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O ;$\vec{u},\vec{v}$), on considère les points M_n d'affixes

$z_n = \left(\dfrac{1}{2}i\right)^n \left(1+i\sqrt{3}\right)$ où n est un entier naturel.

1°) Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

Donner z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2°) Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 (unité graphique : 4 cm).

3°) Déterminer la distance OM_n en fonction de n.

4°) a) Montrer que l'on a $M_nM_{n+1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout n entier naturel.

b) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} = M_0M_1 + M_1M_2 + \ldots + M_nM_{n+1}$.

Déterminer L_n en fonction de n, puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.