SYSTEME LINEAIRES DE DEUX EQUATIONS

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues réelles est tout système de la forme $(S): \begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$

Où a , b , c , d , e et f sont des réels donnés tels que $(a,b) \neq (0,0)$ *et* $(c,d) \neq (0,0)$ *et x et y sont les inconnues.*

a, b , c et d sont appelés coefficients des inconnues et e et f sont appelés coefficients du second membre
Un couple de réel (x_0 , y_0) *est une solution du système* (S) *si* $ax_0 + by_0 = e$ *et* $cx_0 + dy_0 = f$ *.*

Résoudre dans $R \times R$ *ou* R^2 *le système* (S)*, c'est trouver tous les couples de réels (x,y) solutions de* (S)

Matrice d'un système de deux équations

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *est appelée matrice du système* (S) *(c'est une matrice carrée d'ordre deux)*

La matrice $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right)$ *est appelée matrice complète du système* (S)

On appelle matrice triangulaire toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

Systèmes équivalents

Deux systèmes sont équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions

Opération élémentaires

On admet qu'on obtient un système équivalent lorsque :
**)On échange l'ordre deux équations* $(L \leftrightarrow L')$
**)On multiplie les deux membres d'une équation L par un réel* $\lambda \neq 0$ $(L \leftrightarrow \lambda L)$
**)On remplace une équation L par une équation obtenue en additionnant membre membre l'équation L et l'autre multipliée par un réel* $\lambda \neq 0$ $(L \leftrightarrow L + \lambda L')$
**)On supprime une équation lorsqu 'elle est le produit de l'autre par un réel non nul.*

Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Résoudre un système par la méthode du pivot de Gauss, consiste à déterminer un système qui lui est équivalent et dont la matrice est triangulaire.

Exemple :

Soit (S): $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+4y=-1 \end{cases}$ *, le matrice du système* (S) *est* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow 3L_1$ *et* $L_2 \leftarrow 2L_2$ *alors* (S) *équivaut à* $\begin{cases} 6x+9y=3 \\ 6x+8y=-2 \end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ *et* $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ *alors* (S) *équivaut à* $\begin{cases} y=5 \\ 3x+4y=-1 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} y=5 \\ x=-7 \end{cases}$

Résolution par la méthode de déterminants

Le réel $ad-bc$ *s'appelle le déterminant du système* (S) *et on le note* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

On pose : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ *et* $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$

Si $\Delta \neq 0$ *alors* (S) *admet une solution unique le couple* (x_0 , y_0) *tel que :* $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ *et* $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

Si $\Delta = 0$ *, on a :*
Si $(\Delta_x = \Delta_y = 0)$ *alors* (S) *a une infinité de solutions*
Si $(\Delta_x \neq 0$ *et* $\Delta_y \neq 0)$ *alors* (S) *n'a pas de solution.*

Exemple :

Soit (S): $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x+4y=-1 \end{cases}$ *, le matrice du système* (S) *est* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\times 4 - 3\times 3 = -1 \neq 0$ *alors* (S) *admet une solution unique le couple* (x_0, y_0) *tel que :*

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{-1} = -(4+3) = -7 \quad et \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = -(-2-3) = 5$$

Résoudre par substitution

Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des deux équations.
Remplacer, dans l'autre équation, cette inconnue par l'expression trouvée.
Résoudre cette nouvelle équation.
Déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x=-3y \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2(-3y)+y+1=0 \\ x=-3y \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -5y+1=0 \\ x=-3y \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-3y \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases} \text{ alors } S_{R^2} = \left\{\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$$

Résoudre par élimination

Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de sorte que lorsque l'on additionne les deux équations obtenues n on obtient une équation à une seule inconnue.
Résoudre l'équation trouve.
Déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ -2(x+3y)=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ -2x-6y=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1+(-2x-6y)=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 1-5y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-3y \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases} \text{ alors } S_{R^2} = \left\{\left(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$$

SYSTEME LINEAIRES DE TROIS EQUATIONS

On appelle système de trois équations à trois inconnues réelles x , y et z, tout système de la forme :

$(S) : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ *où pour tout* $i, j \in \{1,2,3\}$, a_{ij} *et* b_i *sont des réels donnés tels que*

pour tout $i \in \{1,2,3\}, (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \neq (0,0,0)$.

Les réels a_{ij} *sont appelés coefficients des inconnues et les réels* b_i *sont appelés coefficients du second membre.*

Un triplet de réels (x_0, y_0, z_0) *est une solution du système* (S) *s'il vérifier, à la fois les trois équations du système* (S).

Résoudre dans R^3 *le système* (S)*, c'est trouver tous les triplets de réels (x,y,z) solutions de* (S).

Matrice d'un système de deux équations

La matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *est appelée matrice du système* (S)*(c'est une matrice carrée d'ordre trois)*

La matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$ *est appelée matrice complète du système* (S)

On appelle matrice triangulaire toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Exemple 1 : $\begin{cases} x+y+z=6 & L_1 \\ 2x-y+z=3 & L_2 \\ x-y+2z=5 & L_3 \end{cases}$

On élimine x, en combinant L_1 et L_2, puis L_1 et L_3.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & L_1 \\ 0+3y+z=9 & 2L_1-L_2 \\ 0+2y-z=1 & L_1-L_3 \end{cases}$$

On élimine y dans L_3 en combinant L_2 et L_3.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & L_1 \\ 0+3y+z=9 & L_2 \\ 0+0+5z=15 & 2L_{21}-3L_3 \end{cases}$$

On trouve z, puis en cascade y et x.

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3y+z=9 \\ z=3 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ 3y=6 \\ z=3 \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} x+y+z=6 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \quad \text{équivaut à } x \begin{cases} z=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

On obtient pour solution le triplet : (1 ; 2 ; 3).