EXERCICE N°1

Soit E l'ensemble des entiers n tels que $n \leq 1000$ *. Pour tout entier p , on note par* $M(p)$ *l'ensemble*
$M(p)=\{n \in E \quad tel \quad que \quad n \quad est \quad un \quad multiple \quad de \quad p\}$

1°)Calculer $card\ M(5)$ *,* $card\ M(7)$ *,* $card\ \overline{M(5)}$ *et* $card\ \overline{M(7)}$

2°)Définir l'ensemble $M(5)\cap M(7)$ *et calculer* $cardM(5)\cap M(7)$

3°)Calculer le nombre d'éléments de E qui sont divisible soit par 5, soit par 7.

4°) Calculer le nombre d'éléments de E qui ne sont divisible ni par 5 , ni par 7 .

5°)Justifier pour quoi : $card\ M(2)\cap M(4) = card\ M(4)$

EXERCICE N°2

Dans un classe de $3^{ème}$ *Maths de 30 élèves, il y a 17 élèves aiment le maths , 12 élèves aiment le physique et 10 élèves aiment le deux. On note par :*

M : « Les élèves qui aiment le maths »

P : « Les élèves qui aiment le physique »

1°)Calculer les nombres des élèves qui aiment soit le maths , soit le physique.

2°) Calculer les nombres des élèves qui aiment le maths seulement.

3°) Calculer les nombres des élèves qui aiment le physique seulement.

4°) Calculer les nombres des élèves qui n'aiment , ni le maths , ni le physique.

EXERCICE N°3

Parmi les élèves de classe $3^{ème}$ *Maths, 20 aiment le maths, 14 aiment le physique , 10 aiment l'anglais , 9 aiment le maths et le physique , 5 aiment le maths et l'anglais , 7 aiment le physique et l'anglais et 2 aime les trois. Combien y a –t-il donc d'élèves dans cette classe.*

EXERCICE N°4

On appelle anagramme d'un mot, chacun des « mots », ayant un sens ou non, que l'on peut former avec lettres de ce mot placées à la suite les une des autres de toutes les façons possibles.

1°) Combien y a-t-il d'anagrammes du mots « Maths »

2°)Combien y a-t-il d'anagrammes du mots « Mathématiques »

3°) Combien y a-t-il d'anagrammes du mots « MATHEMATIQUES »

4°)Combien peut-on former de mots de 4 lettres distincts a , k , i , r dans lesquelles les voyelles a et i ne sont pas voisines ?

5°)On admet que le mot le plus long est "anticonstitutionnellement"
Combien la langue française contient-elle au maximum de mots?

EXERCICE N°5

Partie 1

On veut former des nombres à cinq chiffres distinct avec les chiffres : 1,2,3,4,5

- *a- Combien de nombre distincts peut-on ainsi former ?*
- *b- Combien de nombre distincts peut-on former tel que le chiffre des unités est 3*
- *c- Combien de nombre distincts peut-on former tel que le nombre soit pair.*

Partie 2

Faire le même travail avec le chiffre : 0 , 1, 2, 3, 4

Partie 3

On veut former des nombres à cinq chiffres distinct avec les chiffres : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

- *a- Combien de nombres distincts peut-on ainsi former ?*
- *b- Dénombrer les cas passible si :*
  - *i- Le chiffre des unités est un nombre premier .*
  - *ii- Le nombre formé est pair.*
  - *iii- Le nombre formé comprend le chiffre 2 .*

Partie 4

On veut former des nombres à cinq chiffres avec les chiffres : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Faire le même travail de question partie 3

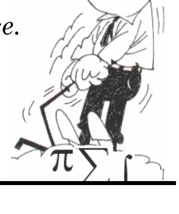
EXERCICE N°6

Une urne contient 49 boules numérotés de 1 à 49. On tire successivement 6 boules , sans remise.

1°)Combien y-a t'il de tirages possibles ?

2°)Combien y-a t'il de tirages qui contiennent 3 numéros pairs et 3 numéros impairs ,

3°) Combien y-a t'il de tirages qui contiennent au moins 5 numéros pairs ?



EXERCICE N°7

Un sac contient 9 jetons répartis comme suit : quatre jetons blancs marqués: 1 , 1 , 2 , 6 et cinq jetons rouges marqués : 2 , 2 , 2 ,3 , 4

Partie I.

On tire simultanément 3 jetons du sac .

1°)Dénombrer les tirages possibles

2°)Dénombrer les tirages comprenant :

- a- *Trois jetons rouges*
- b- *Au moins un jeton blanc*
- c- *3 jetons dont la somme des numéros marqués est égale à 8 .*
- d- *Un jetons et un seul blanc et un jeton et un seul portant un numéro multiple de 3.*
- e- *Deux boules portant le n°1 et une seul boule portant le n°2.*

Partie II.

On tire successivement sans remise 3 jetons du sac . Dénombrer les tirages dans chacun des cas suivants :

1°)Le premier jeton tiré porte le numéro 2.

2°)Obtenir un seul jeton marqué 2.

3°)Le premier jeton tiré est blanc et le deuxième jeton tiré est marqué 2.

Partie III.

Meme questions II, on tire successivement et avec remise 3 jetons du sac.

EXERCICE N°8

On considère les chiffres : 1 , 2 , 3 , 4 ,5 ,6.

1°)On veut constituer un nombre de 3 chiffres distincts.

- a) *Combien de nombres distincts peut-on réaliser ?*
- b) *Combien de nombres pairs distincts peut-on réaliser ?*

2°)A l'aide de ces chiffres , combien peut-on former de nombres de 3 chiffres écrits avec 2 chiffres distincts,l'un d'eux étant répète 2 fois .

3°) A l'aide de ces chiffres , combien peut-on former de nombres de 4 chiffres écrits avec2 chiffres distincts.

EXERCICE N°9

Une urne contient douze boules :cinq blanches, quatre noires et trois verts. On tire maintenant successivement sans remise quatre boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages comprenant

1°)Exactement deux boules blanches.

2°)Au moins une boule noire.

3°)Au plus une boule blanche.

4°)Une seule couleur.

5°)Les trois couleurs.

6°)Exactement deux couleurs.

7°)La première boule blanche est la deuxième tirée.

8°)La première boule tirée est blanche.

9°)La deuxième boule tirée est noire.

10°)La troisième boule tirée est verte.

EXERCICE N°10

Une urne contient douze boules : sept rouges numérotées : 0,7,7,8,8,8,9 et cinq noires numérotées : 0,0,7,8,9.

1°)On tire simultanément cinq boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages comprenant :

- a) *Des boules de même couleur.*
- b) *Des boules portant des numéros dont la somme est paire.*

2°)On tire maintenant successivement sans remise quatre boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages où:

- a) *Les quatre numéros sont obtenus.*
- b) *Une boule rouge portant un numéro pair appairait pour la première fois au troisième tirage.*
- c) *Une boule rouge portant le numéro 7 apparaît pour la dernière fois au deuxième tirage.*
- d) *Si les quatre boules tirées sont posées par ordre du numéro du tirage en ligne et de gauche à droite de façon à former un nombre. Quelle est le nombre de tirages permettant de former:*
  - i) *Le nombre 80*
  - ii) *Un nombre de quatre chiffres.*
  - iii) *Le nombre 8008 où les couleurs sont alternées.*

EXERCICE N°10 (le problème de Galilée)

Le duc de Toscane demanda un jour à Galilée : « pourquoi , lorsqu'on effectue trois lancers d'un dé, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues chacune de six façons différentes :

9=1+2+6=1+3+5=1+4+4=2+2+5=2+3+4=3+3+3 et 10=1+3+6=1+4+5=2+2+6=2+4+4=2+3+5=3+3+4 ? ».

la réponse que fit Galilée : « l'évènement : 'la somme est 9' est formé de 25 issues favorables et l'événement :"la somme est 10"est formé de 27 issues favorables .» Justifier la réponse de galilée.

EXERCICE N°12

On fait tourner 5 disques à 6 secteurs chacun numérotés de 1 à 6 pour obtenir un nombre à 5 chiffres.

1°)Dénombrer tous les résultats possibles.

2°)Combien de nombres ne comprenant pas le chiffres 1 peut-on obtenir.

3°)Combien des nombres comprenant au moins 3 fois le chiffre 1 peut-on obtenir.

EXERCICE N°13

On jette 3 dés de couleurs différentes mais identiques, et on lit les faces supérieurs de chaque dé.

1. *Dénombrer tous les résultats possibles.*
2. *Dénombrer les résultats comportant un seul 4.*
3. *Dénombrer les résultats comportant exactement deux 4.*
4. *Dénombrer les résultats ne comportant aucun 4.*
5. *Dénombrer les résultats formés de trois chiffres différents.*

EXERCICE N°14

Un groupe de 10 personnes comprend : cinq personnes de groupes sanguin A ; trois personnes de groupes sanguin B et deux personnes de groupes sanguin O.

Partie I.

On choisit au hasard 4 personnes. Dénombrer les possibilités comprenant :

1°)Exactement 2 personnes de groupe sanguin B .

2°)Au moins 2 personnes de groupes sanguin B .

3°)Au plus une personne de groupe sanguin O .

4°)Les trois types de groupes sanguins.

Partie II.

Les dix personnes sont malades . On dispose de trois médecines X , Y et Z .

Chaque malade appelle au hasard un médecin et un seul .

1°)Dénombrer tous les cas possibles.

2°)Parmi les 10 personnes il y a 3 frères .

Dénombrer les possibilités dans chacun des cas suivants :

- *a- Les 3 frères appellent le même médecin*
- *b- Les 3 frères appellent des médecin deux à deux différents.*

3°) Dénombrer les possibilités dans chacun des cas suivants :

- *a- Le médecin X reçoit exactement 4 appels*
- *b- Les 10 malades appellent le même médecin .*
- *c- Les 3 médecins sont appelés.*

EXERCICE N°15

Une lasse de 10 garçons et 8 filles décide de monter une pièce de théâtre comprenant 3 rôles masculins et deux rôles féminins.

1°)On choisit au hasard 3 garçons et deux filles pour former une troupe.

- *a) Combien y a t il de troupes possible?.*
- *b) Une fois cette troupe choisie, de combien de façons peut-on distribuer les rôles(ceci sera appelé distributions).*

2°)Zakaria et Yasamine font partie de la classe.

- *a) Quel est le nombre de distributions où Yasamine joue dans la pièce?*
- *b) Quel est le nombre de distributions où Zakaria et Yasamine jouent ensemble?*
- *c) Quel est le nombre de distributions où ni Zakaria ni Yasamine ne jouent dans le pièce?*

EXERCICE N°16

On dispose de cinq casiers numérotés : 1 , 2 , 3 , 4 et 5 et de trois boules portant les lettres a , b et c . On range les trois boules dans les cinq casiers. Chaque boule va dans un casier et chaque casier peut contenir aucune boule, une boule ,ou plusieurs boules.

1°)Combien y a-t-il de rangements possibles?

2°)Combien y a-t-il de rangements pour lesquels chaque casier contient au plus une boule?.

3°) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 contient 2 boules et le casier n°2 une ?

4°) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 ne contient aucune boules ?

5°) Dans cette question on suppose que chaque casier ne peut contenir plus d'une boule.

- *a) Combien y a-t-il de rangements possibles?*
- *b) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 est vide?*

EXERCICE N°17

Un sac contient n boules noires et b boules blanches.

On tire simultanément p boules du sac avec $p \leq b \leq n$, les tirages ont supposées équiprobables.

1°)Dénombrer les tirages comportant zéro boules noires , une boules noire , 2 boules noires , 3 boules noires, …………., p boules noires.

2°)En déduire que : $C_n^0 C_b^p + C_n^1 C_b^{p-1} + C_n^2 C_b^{p-2} + \ldots + C_n^p C_b^0 = C_{n+b}^p$

EXERCICE N°18

1°)A l'aide de formule du binôme , démontrer que : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$

2°)Calculer de même : $o_n = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

3°)Calculer en fonction de n : $s_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$ *et* $t_n = 2C_n^2 + 6C_n^2 + \ldots + n(n-1)C_n^n$.

4°)En déduire en fonction de n la valeur de $z_n = C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + n^2 C_n^n$

EXERCICE N°19

Démontrer les relations suivantes :

1°) $C_{p+1}^q = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + \ldots + C_{p-q}^0$ *où* $0 \leq q \leq p$

2°) $C_{n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + \ldots + C_n^p$ *où* $0 \leq p \leq n$

EXERCICE N°20

1°)Utiliser l'identité : $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ *, où p et q sont deux entiers naturels , pour démontrer que :*

$$C_{p+q}^p = C_p^0 C_q^p + C_p^1 C_q^{p-1} + \ldots + C_p^p C_q^0$$

2°)En déduire que : $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$

EXERCICE N°21

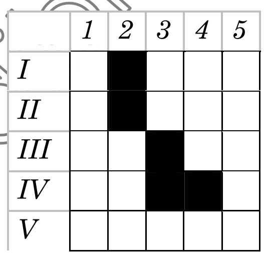
Soit l'ensemble $E = \{0,1,2,\ldots,n\}$ *où n un entier naturel non nul.*

1°)Combien y a –il de couples (x , y) d'éléments de E avec x < y ? Déduisez-en que : $1+2+\ldots+n = C_{n+1}^2$

2°) Combien y a –il de triplets (x , y , z) d'éléments de E avec x < y < z?

EXERCICE N°22

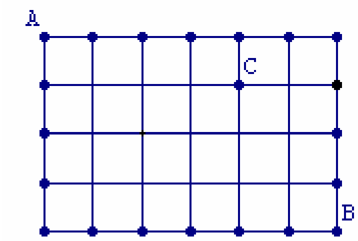
On considère des grilles de mots croisés contenant 25 cases, blanches ou noirs.
Combien de grilles contiennent 5 cases noires ? 20 cases blanches ?



EXERCICE N°23

1°)Combien y a t'il de trajectoires qui vont de A vers B en suivant le quadrillage . (on autoriser que deux directions : vers le haut et vers la droite)

2°)Combien y a t'il de trajectoires qui vont de A vers B passant par C



EXERCICE N°24

$(U_n)_{n\in N}$ est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r. Soit k est un entier naturel , on pose :

$$A_k = \sum_{p=0}^{n} \left(C_n^p\right)^k \quad et \quad B_k = \sum_{p=0}^{n} U_p \left(C_n^p\right)^k$$

1°)Démontrer que : $B_k = \sum_{p=0}^{n} U_{n-p} \left(C_n^p\right)^k$

2°)En déduire que : $B_k = (2U_0 + nr)A_k$.

3°)Calculer A_0 *,* A_1 *,* B_0 *et* B_1.

4°)En déduire que : $C_{2n}^n = \sum_{p=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

EXERCICE N°25

On dispose de cinq casiers numérotés : 1 , 2 , 3 , 4 et 5 et de trois boules portant les lettres a , b et c .
On range les trois boules dans les cinq casiers. Chaque boule va dans un casier et chaque casier peut contenir aucune boule, une boule ,ou plusieurs boules.

1°)Combien y a-t-il de rangements possibles?
2°)Combien y a-t-il de rangements pour lesquels chaque casier contient au plus une boule?.
3°) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 contient 2 boules et le casier n°2 une ?
4°) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 ne contient aucune boules ?
5°) Dans cette question on suppose que chaque casier ne peut contenir plus d'une boule.

- *c) Combien y a-t-il de rangements possibles?*
- *d) Combien y a-t-il de rangements pour lesquels le casier n°1 est vide?*