COURS
NOMBRES COMPLEXES
BAC MATHS AS 2015-2016

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

▪ PROPRIETES :

Soit M un point d'affixe $z=a+ib,\quad a,b\in R$

$a=Re(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$	$b=Im(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	$\lvert z\rvert=\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}$
$z=0\Leftrightarrow Re(z)=Im(z)=0$	$\lvert z\rvert=0\Leftrightarrow z=0$	$z\times\bar{z}=\lvert z\rvert^2\quad,\quad\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}\quad,\ z\in C^*$
$z\in R\Leftrightarrow Im(z)=0\Leftrightarrow\bar{z}=z$	$z\in iR\Leftrightarrow Re(z)=0\Leftrightarrow\bar{z}=-z$	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
$Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=z_B-z_A$	$I=A*B\Leftrightarrow\quad z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$	$Aff\left(a\vec{u}+b\vec{v}\right)=aAff\left(\vec{u}\right)+bAff\left(\vec{v}\right)$
$arg(z)=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}[2\pi]\right)\ ,z\in C^*$	$a\in R_+:\ z^2=a\Leftrightarrow z=\sqrt{a}\ \ ou\ \ z=-\sqrt{a}$ $a\in R_-:\ z^2=a\Leftrightarrow z=i\sqrt{\lvert a\rvert}\ \ ou\ \ z=-i\sqrt{\lvert a\rvert}$	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\equiv arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

▪ PROPRIETES :

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier n on a :

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$	$\overline{zz'}=\bar{z}.\bar{z'}$	$\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$
$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}},(z\neq0)$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)}=\dfrac{1}{\left(\bar{z}\right)^n},(z\neq0)$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}},(z'\neq0)$

$\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	$z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$
$\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert=\dfrac{1}{\lvert z\rvert},(z\neq0)$	$\left\lvert\dfrac{1}{z^n}\right\rvert=\dfrac{1}{\lvert z\rvert^n},(z\neq0)$	$\lvert z+z'\rvert\leq\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$

▪ FORME CARTESIEN – FORME TRIGONOMETRIQUES

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta$$

Forme cartésien		Forme trigonométriques
$z=a+ib$	$\longleftarrow$ $\longrightarrow$	$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right),r>0$

$$r=\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2},\quad\cos\theta=\frac{a}{r},\quad\sin\theta=\frac{b}{r}$$

▪ PROPRIETES :

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls d'écriture trigonométriques :

$z=[r,\theta]=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ *et* $z'=[r',\theta']=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$

$\bar{z}=[r,-\theta]$	$-z=[r,\pi+\theta]$	$kz=[kr,\theta],\ k>0$	$kz=[-kr,\pi+\theta],\ k<0$
$zz'=[rr',\theta+\theta']$	$\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$	$\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$	$z^n=[r^n,n\theta],\ n\in Z$

▪ FORME EXPONENTIELLE

Pour tout réel θ *, on note* $e^{i\theta}$ *le nombre complexe* $\cos\theta+i\sin\theta$.

$e^{i0}=1$	$e^{i\pi}=-1$	$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$	$e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

$\lvert e^{i\theta}\rvert=1$	$e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$	$\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$	$-e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$	$\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta+\theta')}$	$\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta},\ n\in Z$

▪ FORMULE DE MOIVRE

Pour tout réel ϕ *et tout entier n , on a :* $(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$

▪ FORMULE D'EULER

$\cos\phi=\dfrac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$ *et* $\sin\phi=\dfrac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$

▪ RACINES NIEMES

Soit a un nombre complexe non nul et $n\in N^*$ *tel que* $a=[r,\theta]$.

L'équation $z^n=a$ *admet dans C, n solutions distinctes définis par* $z_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$,

$k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

▪ CONSEQUENCES :

Les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

▪ THEOREME

Soit a un nombre complexe non nul d'argument ϕ. *L'équation* $z^2 = a$ *admet dans C deux solutions opposées :*

$$z_1 = \sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right) \quad et \quad z_2 = -\sqrt{|a|}\left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

Ces solutions sont appelées racines carrées du nombre complexe a .

THEOREME

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ *(a , b et complexes et a non nul) admet deux solutions dans C :*

$$z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b-\sigma}{2a} \quad où \quad \Delta = b^2 - 4ac \quad et \quad \sigma \text{ est une racine carrée de } \Delta$$

$az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$	$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$	$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

A RETENIR *: Soit* $z^2 = a + ib$, $a,b \in R$ *, avec* $z = x + iy$ *alors on a* $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$

THEOREME

Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *des nombres complexes tels que* $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Si z_0 *est un zéro de P, alors* $P(z) = (z - z_0) g(z)$ *, où g(z) est se la forme* $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \ldots + b_0$ *, avec* $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ *complexes.*