EXERCICE N°1

Sans utiliser une calculatrice, calculer le réel :

1°) $\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{14} - \sin\frac{3\pi}{7}$

2°) $\tan\frac{\pi}{9} + \tan\frac{2\pi}{9} + \tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{4\pi}{9} + \tan\frac{5\pi}{9} + \tan\frac{2\pi}{3} + \tan\frac{7\pi}{9} + \tan\frac{8\pi}{9}$

3°) $\cos^2\frac{\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5}$

4°) $\tan\frac{\pi}{12}.\tan\frac{5\pi}{12} + \cot an\frac{\pi}{5}.\tan\frac{4\pi}{5}$

5°) $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$

6°) $\cos^2\frac{2\pi}{8} + \cos^2\frac{4\pi}{8} + \cos^2\frac{6\pi}{8} + \cos^2\frac{8\pi}{8}$

7°) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE N°2

1°)*On remarquant que l'on a :* $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, *calculer* $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ *et* $\tan\frac{\pi}{12}$

2°)*Démontrer que l'on a :* $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$

3°) *Calculer* $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\tan\frac{\pi}{8}$ *et* $\tan\frac{5\pi}{8}$

EXERCICE N°3

Soit ACDE un carré direct de côté a = 2 et soit ABC un triangle équilatéral indirect .

1°)*Montrer que ABE est un triangle isocèle et calculer ses angles et en déduire que* $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

2°)*Soit H le projeté orthogonale de B sur [ED].*

Calculer BH et en déduire le calcul exact de $\cos\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE N°4

Soit $\wp = \cos x \cos 2x \cos 4x$

1°)*Montrer que :* $8\sin x.\wp = \sin 8x$

2°)*En déduire la valeur de* $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

EXERCICE N°5

Soit $\ell = 2\sin x(\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)$

1°)*Montrer que : pour tout a,b∈* $\mathbb{R}$: $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

2°)*Montrer que* $\ell = \sin 7x - \sin x$

3°)*En déduire la valeur de* $S = \sin^2\frac{2\pi}{7} + \sin^2\frac{4\pi}{7} + \sin^2\frac{6\pi}{7}$

EXERCICE N°6

1°)*Montrer que pour tout x de R :* $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

2°)*Montrer que pour tout x de R :* $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$

3°) *Montrer que pour tout x de* $R - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\right\}, k \in Z$: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

4°) *En déduire que pour tout x de* $R - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi,\right\}, k \in Z$: $\frac{\cos 2x}{\sin 2x - 1} = \cot an\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE N°7

1°)Montrer que pour tout x de R : $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=0$

2°)Calculer alors $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{11\pi}{7}+\cos\frac{17\pi}{7}=0$

3°) Montrer que : pour tout $a,b\in R$: $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$

4°)En déduire que $\cos^2 x+\cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

EXERCICE N°8

1°)Montrer que pour tous réels a et b différents de $\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in Z)$, on a : $\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$

2°)Soit x un réel de $\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[$.

a) Montrer que : $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sin 2x}{2\cos 2x-1}$

b) Montrer que : $\cos x.(2\cos 2x-1)=\cos 3x$

c) En déduire que $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3\tan 3x$

EXERCICE N°9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer le cordonnées polaire des points $A(1,\sqrt{3})$, $B(1,-\sqrt{3})$, $C(-1,\sqrt{3})$ et $D(-1,-\sqrt{3})$

EXERCICE N°10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère le carré OABC de centre S tel que les cordonnées cartésiennes respectives de A et C sont $(1,\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3},1)$.

1°)Faire une figure.

2°)Déterminer les cordonnées polaires de chacun des points A , C , B et S .

3°)En déduire le valeur de $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

EXERCICE N°11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(2,0)$, $B(\sqrt{3},1)$ et le point C vérifiant $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

1°)Déterminer les cordonnées polaires du point B.

2°)Placer les points A , B et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

3°)a-Donner la nature du quadrilatère OACB.

b-Déterminer les cordonnées cartésiennes et les cordonnées polaires de C.

c-En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4°)Construire chacun des ensembles suivants :

$E=\left\{M(r,\theta)/\quad \theta=\frac{\pi}{6}\quad et\quad r\in[1,3]\right\}$ et $F=\left\{M(r,\theta)/\quad \theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right[\quad et\quad r=2\right\}$

EXERCICE N°12

Partie I.

Résoudre les équations suivants dans R puis dans $[0,2\pi]$ et représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions :

$2\sin x=\sqrt{3}$; $2\cos x=-1$, $2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$, $\sin x=\cos x$, $\tan x=-\sqrt{3}$, $\cos x-\sin^2 x-1=0$.

Partie II.

Résoudre les inéquations suivants dans $[0,2\pi]$

$\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2\cos x + 1 \geq 0$, $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$, $\tan x > -\sqrt{3}$.

EXERCICE N°13

1°) Résoudre dans R : $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

2°)Résoudre dans R : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$

3°) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$: $\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{2}$

4°) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$: $3\cos x - 2\sin^2 x + 3 = 0$

5°) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$: $3\cos x - 2\sin^2 x + 3 \geq 0$

6°)Résoudre dans $[0, 2\pi]$: $\frac{2\cos 2x - 1}{1 + 2\cos 2x} \leq 0$

EXERCICE N°14

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin^2 x - 1$ et $v(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

1°)Transformer u(x) en $[c - r\cos(2x + \varphi)]$ où c , r et φ sont des réels avec r >0 et $0 < \varphi < \pi$.

2°)Resoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : u(x) = 1 .

3°)Montrer que, pour tout réel x, on a : $u(x) = 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4°)Montrer que, pour tout réel x , on a : $v(x) = \sin 3x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

5°) Montrer que, pour tout réel x , on a : $v(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

6°)Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b)Montrer que pour tout x de D : $f(x) = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

c)Résoudre dans $[0, \pi]$, l'inéquation : $f(x) < \frac{2}{\sqrt{3}}$