

**Définition 1**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  s'il existe un nombre réel  $\ell$  tel que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$  ou encore

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Le réel  $\ell$ , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , il noté  $f'(a)$

(\*) Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors la courbe représentative de  $f$  admet au point  $M(a, f(a))$  une tangente  $T$  d'équation :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$

**Exemple :**

Soit  $f : x \mapsto x^3$ . Montrer que  $f$  est dérivable en  $a$  où  $a$  est réel quelconque.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + a^2 + ax)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + a^2 + ax) = 3a^2$$

alors  $f$  est dérivable en  $a$  et on a :  $f'(a) = 3a^2$

**Définition 2**

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :  $]a-h, a[$  ( $h > 0$ )

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  s'il existe un nombre réel  $\ell'$  tel que :  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell'$  ou

$$\text{encore } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell'$$

Le réel  $\ell'$ , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de  $f$  à gauche en  $a$ , il noté  $f'_g(a)$ .

**Définition 3**

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :  $[a, h+a[$  ( $h > 0$ )

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  s'il existe un nombre réel  $\ell''$  tel que :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell''$  ou

$$\text{encore } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell''$$

Le réel  $\ell''$ , lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de  $f$  à droite en  $a$ , il noté  $f'_d(a)$

**Conséquences :**

1°)  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f'_g(a) = f'_d(a)$  nombre fini

2°) Si  $f$  est dérivable à droite de  $a$  alors la courbe représentative de  $f$  admet au point  $M(a, f(a))$  une demi tangente  $T_d$  d'équation :  $T_d : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$  et  $x \geq a$

3°) Si  $f$  est dérivable à gauche de  $a$  alors la courbe représentative de  $f$  admet au point  $M(a, f(a))$  une demi tangente  $T_g$  d'équation :  $T_g : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$  et  $x \leq a$

**Interprétation graphiques :**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$  ou encore  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$

Si :	Interprétation graphique :
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	$C_f$ admet en point $M(a, f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = a$ et $y \geq f(a)$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	alors $C_f$ admet en point $M(a, f(a))$ un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : $x = a$ et $y \leq f(a)$

**Exemple :** Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite de point d'abscisse  $x = 0$  et interpréter la résultat tel que :

$$f(x) = \sqrt{x}. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



alors la courbe admet en point  $M(0,0)$  une demi tangente verticale dirigée vers le haut d'équation :  $x = 0$  et  $y \geq 0$

### Approximation affine :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant  $a$ .

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors :  $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

On dit que  $f(a) + f'(a)h$  est une approximation affine de  $f(a+h)$ , pour  $h$  voisin de zéro.

### Exemple :

Trouver une valeur approchée de  $(3.98)^3$

Soit  $f : x \mapsto x^3$ ,  $a = 4$  et  $h = -0.02$  alors  $f(4-0.02) \approx f(4) - \frac{2f'(4)}{100}$  alors  $(3.98)^3 \approx 63,04$

(le calculatrice donne : 63,044792)

### Théorème des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé borné  $[a,b]$  et dérivable sur  $]a,b[$ .

Alors il existe au moins un élément  $x_0$  de  $]a,b[$  tel que :  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

### Sens de variation

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$  et dérivable sur  $]a,b[$

Si  $f'(x) \geq 0$  sur  $]a,b[$  alors  $f$  est croissante sur  $[a,b]$

Si  $f'(x) > 0$  sur  $]a,b[$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $[a,b]$

Si  $f'(x) \leq 0$  sur  $]a,b[$  alors  $f$  est décroissante sur  $[a,b]$

Si  $f'(x) < 0$  sur  $]a,b[$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $[a,b]$

Si  $f'(x) = 0$  sur  $]a,b[$  alors  $f$  est constante sur  $[a,b]$

### Inégalités des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé borné  $[a,b]$  et dérivable sur  $]a,b[$ .

Si : existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que :  $m \leq f'(x) \leq M$  pour tout  $x$  de  $]a,b[$

On a alors :  $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$

Si pour tout  $x$  de  $]a,b[$  :  $|f'(x)| \leq k$  alors  $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

### Point d'inflexion

Soit  $x_0$  un réel et  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant  $x_0$ .

Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  sans changer de signe alors le point  $I(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion.

Si  $f''$  s'annule en  $x_0$ , en changeant de signe, alors le point  $I(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion.

### Extremum

\*) Si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$  alors  $f'(x_0) = 0$

\*) Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ .

### Tableau de dérivé :

Fonction $f$	Fonction dérivée $f'$	Domaine de définition de $f'$
$F(x) = k$ (constante)	$F'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$F(x) = x$	$F'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$F(x) = ax + b$	$F'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$F(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}^*$ )	$F'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ ; $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$F(x) = \sqrt{x}$	$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$
$F(x) = \frac{1}{x}$	$F'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$F(x) = \cos(x)$	$F'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$F(x) = \sin(x)$	$F'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$F(x) = \tan(x)$	$F'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$F(x) = \cos(ax+b)$	$F'(x) = -a \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$F(x) = \sin(ax+b)$	$F'(x) = a \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$F(x) = \tan(ax+b)$	$F'(x) = a(1 + \tan^2(ax+b))$	$\mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi - b}{a}; k \in \mathbb{Z} \right\}$



## Opérations sur les dérivées

Lorsque  $u$  et  $v$  sont des fonctions dérivables sur un intervalle  $I$

Fonction	Dérivée	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
$k.u$ ( $k = \text{constante}$ )	$k.u'$	
$u.v$	$u'.v + u.v'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur $I$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur $I$
$u^n$ ( $n \in \mathbb{Z}^*$ )	$n.u'.u^{n-1}$	$u > 0$ sur $I$ si $n \leq 0$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur $I$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$	

<http://maths-akir.nidiblogs.com/>

