Fiche de cours $4^{ème}$ sciences
PROBABILITES

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

Système complet

Soient A_1 , A_2 , ….,A_n forment un système complet d'évènements de Ω ssi :
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots . \cup A_n = \Omega$ et $\forall i$, $j \in \{1,2,\ldots..,n\}$ avec $i \neq j$ on a : $A_i \cap A_j = \varnothing$
Exemple : $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4,5,6\}$
A_1 , A_2 et A_3 forment un système complet d'évènements de $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

***Récapitulation** :*

Type de tirage	*Successif avec remise*	*Successif sans remise*	*simultané*
Ordre	*L'ordre intervient*	*L'ordre intervient*	*L'ordre n' intervient pas*
Un cas possible	*un p-uplet avec possibilité de répétition*	*un p-uplet d'élément distinct*	*une partie de p éléments*
cardΩ	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Vocabulaire des probabilités

Expérience aléatoire. Eventualité

On lance un dé ou une pièce de monnaie, on tire une carte dans un jeu…
Seul le hasard intervient.
On parle alors d'expérience aléatoire.
Les différents résultats d'une expérience aléatoire s'appellent des éventualités.
L'ensemble des éventualités s'appelle l'univers, on le note souvent Ω.
Le nombre des éventualités de A s'appelle le cardinal de l'événement . On le note card(A).

Exemple :
On lance un dé.
Il y a 6 éventualités : 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
L'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

Evénements
Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers.
On dit que cet événement est réalisé si l'une des éventualités qui le compose est réalisée.

Evénements particuliers :
L'événement certain contient toutes les éventualités. Il est égal à l'univers Ω.
L'événement impossible ne contient aucune éventualité. C'est l'ensemble vide $\varnothing$.
Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule éventualité : $\{a\}$

Exemple :
On lance un dé.
L'événement certain est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.
Les 6 événements élémentaires sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$.
L'événement « Obtenir un nombre impair » est $\{1 ; 3 ; 5 \}$.
Il est composé de trois éventualités.
L'événement « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est l'événement certain.
L'événement « Obtenir 8 » est l'événement impossible.

Soit A et B deux événements de Ω.
On dit que A est inclus dans B, et l'on note $A \subset B$, si toutes les éventualités de A appartiennent aussi à B.
L'événement $A \cap B$ est l'ensemble des éventualités communes à A et à B.
L'événement $A \cup B$ est l'ensemble des éventualités qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.
Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$
L'événement contraire de A est le complémentaire de A dans Ω. ; on le note $\overline{A}$.(C'est l'événement qui contient toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.
Des événements forment une partition d'un événement A, s'ils sont incompatibles deux à deux et si leur réunion est égale à A.

Probabilité

On considère un univers Ω lié à une expérience aléatoire, $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
Définir une probabilité sur Ω, c'est associer à chaque éventualité x_i un réel positif p_i de sorte que $p_1 + p_2 + \ + p_n = 1$.

Propriétés :

- $0 \leq p(A) \leq 1$
- $p(\emptyset) = 0$ *(la probabilité de l'événement impossible est nulle)*
- $p(\Omega) = 1$ *(la probabilité de l'événement certain est égale à 1).*
- *$p(A)$ est la somme des probabilités de tous les événements élémentaires qui forment A.*
  Si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$, alors $p(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + p(\{a_3\}) + \dots + p(\{a_k\})$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- *Si A et B sont incompatibles alors, $p(A \cap B) = 0$ on a donc : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.*
- *Quel que soit l'événement A, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$*
- *Si A_1, A_2 et A_3 forment une partition de D, alors $p(D) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$. (Cette propriété se généralise à un nombre quelconque d'événements formant une partition de D.)*

Equiprobabilité

Lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que les événements élémentaires sont équiprobables.

Propriété :

Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, et que le nombre d'éléments de Ω est n,
La probabilité de chaque événement élémentaire est $\frac{1}{n}$,
Pour tout événement A, $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas " favorables"}}{\text{nombre de cas " possibles"}}$

Exemple :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Chaque tirage est équiprobable.
La probabilité de tirer le roi de trèfle est $\frac{1}{52}$.
La probabilité de tirer un trèfle est de $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Probabilité conditionnelle

Exemple

Parmi les 80 filles qui étaient en classe :
36 sont aujourd'hui salariées ; 39 sont mères de famille ; 15 sont salariées et mères de famille.
On choisit au hasard une de ces 80 femmes.
Considérons les événements A : « la femme choisie est salariée » et B : « la femme choisie est mère de famille ».
1)Compléter le tableau suivant :

	B : mère de famille	$\overline{B}$: non mère de famille	Total
A : salariée	15	21	36
$\overline{A}$: non salariée		20	
Total	39	41	80

2)Calculer P(A). *rép.* $(\frac{36}{80})$

3)Que représente l'événement $A \cap B$? Calculer la probabilité de cet événement. *rép.* $(\frac{15}{80})$

4)On interroge une salariée. Quelle est la probabilité que ce soit une mère de famille ? Vérifier que cette probabilité est égale à $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. *rép.* $(\frac{15}{36})$

Remarque :

C'est la probabilité que la personne interrogée soit une mère de famille, sachant que l'on a interrogé une salariée.

Définition et propriété

Etant donné deux événements A et B avec $p(A) \neq 0$, on appelle « probabilité de B sachant A » et on note $p_A(B)$, la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est déjà réalisé.

On a alors $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Formule des probabilités composées :

on a donc aussi : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

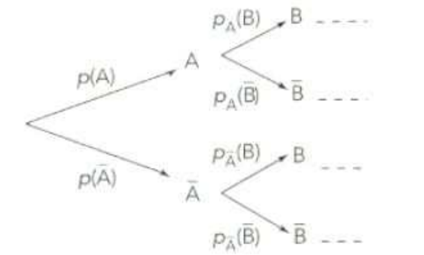
Exemple :

Dans l'exemple précédent, calculer la probabilité que la personne interrogée soit une salariée, sachant que l'on a interrogé une mère de famille. *rép.* $(\dfrac{15}{39})$.

Calculer $P_B(A)$. Que représente cette probabilité ? $P_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{15}{80}}{\frac{39}{80}}$

Représentation à l'aide d'un arbre pondéré

On appelle arbre pondéré un arbre sur lequel on a placé les probabilités correspondant à chaque branche comme l'indique le schéma ci-dessous :

Etape 1	*Etape 2*	*Résultat*	*Probabilité*
		$A \cap B$	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
		$A \cap \overline{B}$	$p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times p_A(\overline{B})$
		$\overline{A} \cap B$	$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$
		$\overline{A} \cap \overline{B}$	$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(\overline{B})$

La probabilité d'un résultats est égale au produit des probabilités portées par les branches qui conduisent à ce résultat.

La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1

Exemple :

Dans une forêt, 70% des arbres sont des chênes, les autres sont des hêtres. 40% des arbres ont une maladie et cette maladie touche un hêtre sur 3. On désigne par C l'événement « être un chêne » et par M « avoir la maladie ».

1)Compléter le tableau ci-contre en indiquant dans chaque case le pourcentage correspondant.

	C	$\overline{C}$	*Total*
M	*30%*	*10%*	*40%*
$\overline{M}$	*40%*	*20%*	*60%*
Total	*70%*	*30%*	*100%*

2)Faire un arbre pondéré et calculer les probabilités affectées à chaque branche.

$$P_C(M) = \frac{p(C \cap M)}{p(C)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

$$P_C(\overline{M}) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

Formule des probabilités totales

Si A est un événement de probabilité non nulle et $\overline{A}$ son événement contraire, alors les événements $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles et leur réunion est B :

$P(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$.

A et $\overline{A}$ forment une partition de l'ensemble E. Ce cas particulier se généralise.

Soit les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de probabilités non nulles constituant une partition de E.
La probabilité d'un événement de B de l'ensemble E peut se calculer par la formule :
$p(B) = p_{A_1}(B)\times p(A_1) + p_{A_2}(B)\times p(A_2) + \ldots + p_{A_n}(B)\times p(A_n)$

Exemple :
Dans une usine d'automobiles, trois chaînes « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25%, 35% et 40% de la production de moteurs.
Certains de ces moteurs sont écartés comme défectueux, dans les proportions suivantes :
5% pour la chaîne « a », 4% pour la chaîne « b » et 1% pour la chaîne « c ».
On prend au hasard un moteur et on définit les événements suivants :
A : « le moteur est issu de la chaîne « a » »
B : « le moteur est issu de la chaîne « b » »
C : « le moteur est issu de la chaîne « c » »
D : « le moteur est défectueux »
Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
1)Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et tracer un arbre pondéré illustrant la situation.
2)Calculer P(D).
3)Quelle est la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « a » sachant qu'il est défectueux ?
4)Calculer la probabilité qu'un moteur sorte de la chaîne « c » sachant qu'il n'est pas défectueux ?

1)$P(A) = 0{,}25$; $P(B) = 0{,}35$; $P(C) = 0{,}4$; $P_A(D) = 0{,}05$; $P_B(D) = 0{,}04$; $P_C(D) = 0{,}01$.
2)$P(D) = P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D) = 0{,}0305$
3)$P_D(A) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}25\times 0{,}05}{0{,}0305} \approx 0{,}4098$

4)$P_{\overline{D}}(C) = \dfrac{P(C\cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{P(C)\times P_C(\overline{D})}{1-P(D)} = \dfrac{0{,}4\times 0{,}99}{1-0{,}0305} \approx 0{,}4085$

Indépendance de deux événements
Définition et propriété
On dit que les événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre, donc si :
$p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.
On a alors : $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$.

Exemple :
Lancer une pièce, puis un dé, puis tirer au hasard dans une boîte … ou les lancers successifs d'une pièce, d'un dé, … la répétition du tirage d'une bille dans une boîte qui contient toujours le même nombre de billes, … sont des expériences indépendantes :
La réalisation d'un résultat n'agit pas sur la probabilité du résultat suivant.
On admet alors le principe suivant :
Principe multiplicatif :
Dans le cas d'une succession d'expériences indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple :
On lance une pièce, puis un dé à 6 faces, puis une pièce, puis de nouveau une pièce puis un dé à 4 faces.
Si on a obtenu Face sur la première pièce, cela n'agit pas sur le résultat du lancer du dé à 6 faces, et ainsi de suite.
La probabilité d'obtenir la liste de résultats (F ;2 ;P ;P ;3) est alors : $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{192}$

Variables aléatoires (aléa numériques)

Soit X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X , l'application : $P_X : \begin{cases} X(\Omega) \to [0,1] \\ x_i \mapsto P(X = x_i) \end{cases}$

Soit $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$

$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1$	$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$V(x) = E\left((X - E(X))^2\right)$ $V(x) = E(X^2) - (E(X))^2$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
$E(X + a) = E(X) + a$	$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$	$V(aX + b) = a^2 V(X)$	$\sigma(aX + b) = \lvert a \rvert \sigma(x)$

Fonction de répartition :

On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de R dans $[0,1]$ *par* $F : x \mapsto p(X \leq x)$

Schéma de Bernoulli, loi binomiale

Epreuve de Bernoulli

Définition :

*Une expérience qui ne comporte que deux issues possibles (succès ou échec) est appelée **épreuve de Bernoulli.***

Exemples :

- *Le jet d'une pièce de monnaie bien équilibrée constitue l'exemple le plus simple d'épreuve de Bernoulli : la probabilité du succès (« pile » par exemple) est 0,5 et celle de l'échec (« face » par conséquent) est également 0,5.*
- *Mais le jet d'un dé classique peut également constituer un exemple d'épreuve de Bernoulli, si l'on décide par exemple qu'un succès consiste à obtenir le 6 et que par conséquent un échec consiste à ne pas obtenir le 6. La probabilité du succès est* $\frac{1}{6}$ *et celle de l'échec est* $\frac{5}{6}$.

Remarque :

Si dans une épreuve de Bernoulli la probabilité du succès est p, la probabilité de l'échec est 1 -p.

Schéma de Bernoulli

Définition :

*On appelle **schéma de Bernoulli**, une expérience qui consiste à répéter **plusieurs fois et de manière indépendante** la même épreuve de Bernoulli.*

Exemples :

- *Si l'on jette trois fois la même pièce de monnaie, on est en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.*
- *Une urne contient 3 boules noires et 5 blanches. Une expérience consiste à extraire trois boules de cette urne et à noter leur couleur.*
  - *Si le tirage des trois boules se fait **avec remise**, on est bien en présence d'un schéma de Bernoulli à 3 épreuves, la probabilité d'un succès (obtenir une boule blanche par exemple) étant* $\frac{5}{8}$ *et celle de l'échec (obtenir une boule noire) étant* $\frac{3}{8}$.
  - *Si par contre le tirage se fait **sans remise**, nous ne sommes plus en présence d'un schéma de Bernoulli puisque les épreuves ne sont plus indépendantes les unes des autres.*

Loi binomiale

Définition :

*On appelle **loi binomiale**, la loi de probabilité correspondant à un schéma de Bernoulli. Cette loi est souvent notée B(n, p), la lettre B rappelant le mot « binomial », le nombre n étant le nombre d'épreuves et le nombre p étant la probabilité d'un succès lors d'une épreuve.*

Remarque :

Un schéma de Bernoulli s'illustre par un arbre dans lequel :

- *de chaque nœud partent deux branches ;*
- *toutes les branches menant à un succès portent la même probabilité p*
- *toutes les branches menant à un échec portent la même probabilité 1 - p.*

Soit p la probabilité de l'événement succès.

On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.

Alors la loi de probabilité de X est donnée par : $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k\in\{0,1,...,n\}$

$E(x)=np$	$V(x)=np(1-p)$	$\sigma(x)=\sqrt{np(1-p)}$

Lois continues

Soit la fonction définie sur [a,b] par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ *est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur [a,b].*

On appelle probabilité uniforme sur [a,b] l'application qui à tout intervalle $[c,d]\subset[a,b]$ *associe le réel*

$$p([c,d])=\int_c^d f(x)dx$$

$p(\{c\})=\int_c^c f(x)dx=0$	$p(\overline{[c,d]})=1-p([c,d])$	*X suit une loi de probabilité uniforme p si* $p(c\le X\le d)=\dfrac{d-c}{b-a}$

Loi exponentielle

Soit $\lambda>0$ *. La fonction f définie sur* $[0,+\infty[$ *par* $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ *est appelée densité de loi exponentielle.*

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ *, l'application p qui :*

- *A tout intervalle* $[c,d]\subset[0,+\infty[$ *associe le réel* $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$
- *A tout intervalle* $[c,\infty]\subset[0,+\infty[$ *associe le réel* $p([c,\infty])=e^{-\lambda c}$

$p(\{c\})=\int_c^c f(x)dx=0$	$p([0,c])=\int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda c}$	$p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$	$p([c,+\infty])=1-p([0,c])=e^{-\lambda c}$