Fiche de cours $4^{ème}$**économie**
MATRICES ET SYSTEMES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

Définition :

n et p étant deux entiers naturels non nuls.

Une matrice d'ordre $n\times p$ est un tableau de nombres réels formé de b lignes et de p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients ou termes de ma matrice.

Notation

Soit M une matrice d'ordre $n\times p$. Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne est noté a_{ij}.

Toute matrice M de coefficients a_{ij} avec i et j des entiers vérifiant : $1\le i\le n$ et $1\le j\le p$ est noté $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et représentée comme ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & .. & a_{1p} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & & & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note par O la matrice nulle. $O=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & .. & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

On note par I_n la matrice unité d' ordre n (c'est-à-dire d'ordre $n\times n$), $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Définition et Propriétés

Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de même ordre $n\times p$ et k un réel.

**)La somme des deux matrices A et B , notée A + B , est la matrice $C=(a_{ij}+b_{ij})$ de même ordre $n\times p$.*

**)La différence des deux matrices A et B , notée A - B , est la matrice $D=(a_{ij}-b_{ij})$ de même ordre $n\times p$.*

**)Deux matrices sont égales si et seulement si, elles sont de même ordre et leurs coefficients de mêmes indices sont égaux deux à deux.*

*) $A+O=O+A=A$

*) $A+B=B+A$

*) $(A+B)+C=A+(B+C)$

*) $kA=(ka_{ij})$

*) $-A=(-a_{ij})$ *est la matrice opposée de A.*

*) $k(A+B)=kA+kB$

Produit de deux matrices

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice d'ordre $n\times p$ et $B=(b_{kj})$ une matrice d'ordre $p\times q$. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice , notée $A\times B=(c_{ij})$ d'ordre $n\times q$, définies par $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$

*) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ *(on suppose que le produit est possible)*

*) $A\times(B+C)=A\times B=A\times C$ *(on suppose que le produit est possible)*

**)Pour tout matrice carrée M d'ordre 2 on a :* $M\times I_2=I_2\times M=M$

**)Pour tout matrice carrée N d'ordre 3 on a :* $N\times I_3=I_3\times N=N$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0 + 2\times 1 - 1\times 4 & 1\times 3 + 2\times 1 - 1\times 2 \\ 2\times 0 + 0\times 1 + 1\times 4 & 2\times 3 + 0\times 1 + 1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice

Soit $M = (a_{ij})$ *une matrice d'ordre n.*

**)On dit que M est inversible si et seulement si s'il existe une matrice M' de même ordre n vérifiant* $M \times M' = I_n$

M' est appelée dans ce cas l'inverse de M, noté M^{-1}

**)Si M est inversible alors sa matrice inverse et unique.*

Déterminant et système

Soit M une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.

**)M est inversible si et seulement si ,* $det(M) \neq 0$

**)Si M est inversible alors tout système, d'écriture matricielle,* $A \times X = B$ *, a une solution et une seule et l'on a* $X = A^{-1} \times B$

**)Si M est non inversible alors le système* $A \times X = B$ *n'a pas de solution ou a une infinités de solutions.*

Matrice d'ordre 2	***Matrice d'ordre 3***
$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
Déterminant $dét(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$	*Déterminant* $dét(N) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
Inverse de M (on suppose que $det(M) \neq 0$ *)* $M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$