Séries d'exercices *3ème Maths*
NOMBRES DERIVES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**
Site Web : ***http://maths-akir.midiblogs.com/***

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2}{x} & si \quad x>2 \\ f(x)=\dfrac{x}{2} & si \quad x\le 2 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en 2 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.
Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} & si\ x>1 \\ f(1)=m \end{cases}$.

1°)Quelle valeur faut-il donner à m pour que f soit continue en 1.
2°) Etudier alors la dérivabilité de f en 1.
3°) Que peut-on dire de la courbe C_f *au point d'abscisse 1 ?*

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=(x+1)^2 & si \quad x\le -1 \\ f(x)=(x+1)\sqrt{x+1} & si \quad -1<x\le 0 \\ f(x)=\dfrac{2x+2}{x+2} & si \quad x>0 \end{cases}$

1°)Etudier la continuité de f en -1 et 0.
2°)Montrer que f est dérivable en a =-1 et interpréter graphiquement le résultat.
3°)Vérifier que pour tout $x\in\,]-1,0[$ *: on a :* $\dfrac{f(x)-1}{x}=\sqrt{x+1}+\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
4°)Etudier la dérivabilité de f en 0. Ecrire une équation de la tangente ou des demi tangentes éventuelles au point A d'abscisse 0 et les construire.
5°)On considère la fonction g définie sur R_+^* *par :* $g(x)=\dfrac{2x+2}{x+2}$

- *a- Montrer que g est dérivable en tout point a de* $]0,+\infty[$ *et calculer* $g'(a)$
- *b- Montrer que* (ζg) *admet une tangente parallèle à la droite* $\Delta : x-3y+1=0$

EXERCICE N°3

Soit la fonction $f : x\mapsto ax^2+bx+c$ *;où a , b et c sont des réels et* $a\neq 0$ *.*
On désigne par (ζf) *la courbe représentative de f dans un repère du plan.*
1°)Montrer que f est dérivable en tout point x_0 *de R et calculer* $f'(x_0)$ *.*
2°)Déterminer les réels a , b et c pour les deux conditions suivantes soient satisfaites :
- (ζf) *admet en sont point d'abscisse 2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.*
- (ζf) *admet en son point d'abscisse 1 pour tangente la droite* $\Delta : 2x+y-4=0$

EXERCICE N°4

Soit a un réel donnée .
1°)Soit f une fonction dérivable sur R. Montrer que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)$
2°)Calculer alors $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{y.x^{2009}-x.y^{2009}}{y-x}$

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2+|x+2|-1 & si \quad x<1 \\ f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}+3x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$

1°)Etudier la dérivabilité de f en -2. Interpréter graphiquement le résultat.
2°)Montrer que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$
3°)En déduire $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+nh)-f(1)}{h}$ *puis calculer* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$ $(n\in Z^*)$

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie R par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1}+4-x & si \quad x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{(m+1)x^3-3x+m^2}{x-1} & si \quad 0 \leq x < 1 \\ f(x) = x^2\sqrt{-x}+2x-1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2°)Etudier suivant m , $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

3°) Etudier suivant m la continuité de f en 1 .

4°) Etudier suivant m la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

5°)On prend m=1 et $x_0 \in]0,1[$

a- Montrer que f est dérivable en x_0 .

b- Existe-t-il un point de (ζf) d'abscisse x_0 où la tangente est parallèle à $\Delta : 4x-y+3=0$

c- Existe-t-il un point de (ζf) d'abscisse x_0 où la tangente est perpendiculaire à $\Delta' : x-3y-3=0$

EXERCICE N°7

Soient les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $h : x \mapsto (1+x)^2$, $k : x \mapsto (1+x)^3$,

$m : x \mapsto (1+x)^n$ ($n \in N^*$)

1°)Justifier que chacune des ces fonctions sont dérivables en 0 et calculer $f'(0)$ et $g'(0)$

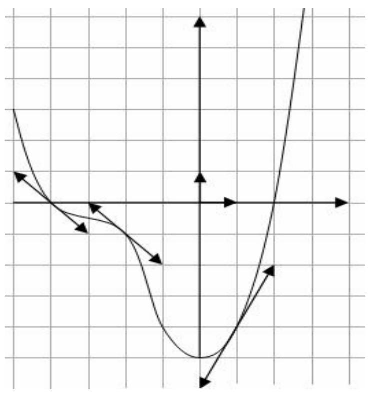
2°)Déterminer les approximations affine de f et g au voisinage de 0.

3°)Calculer alors $\sqrt{1,0002}$, $\sqrt{0,995}$, $\dfrac{1}{0,996}$,$\dfrac{1}{1,0008}$, 0.97^2 , 0.97^3 , 0.97^{2008}

EXERCICE N°8

Soit(ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

(Voir figure)



1°)Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

a) $f'(-4) < 0$

b) $f'(1) < 0$

2°)Par un lecture graphique , Calculer : $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1)$

3°)Soient T_{-4} , T_{-2} et T_1 les tangentes à (ζf) respectives aux points d'abscisses -4 , -2 et 1.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) T_{-4} est parallèle à T_{-2}

b) T_{-4} est perpendiculaire à T_1

4°)Résoudre dans R l'équation $f'(x) < 0$

5°)Soit la fonction g définie sur R d'axe se symétrie la droite d'équation x = 1 et on a pour tout $x \geq 1$: g(x) = f(x). Etudier la dérivabilité de g en 1 .

6°)Sachant que pour tout $x \geq 1$, il existe des réels a , b et c tel que $f(x) = ax^2+bx+c$

Etablir que : $g(x) = \begin{cases} 2x^2-2x-4 & si \quad x \geq 1 \\ 2x^2-6x & si \quad x \leq 1 \end{cases}$

7°)Calculer $g'(x_0)$ pour tout $x_0 \in]1,+\infty[$ et $x_0 \in]-\infty,1[$

8°) Existe-t-il un point de (ζg) d'abscisse $x_0 \in]1,+\infty[$ où la tangente est parallèle à $\Delta : 3x-y+1=0$

9°)Existe-t-il un point de (ζg) d'abscisse $x_0 \in]-\infty,1[$ où la tangente est perpendiculaire à $\Delta' : y-2x+1=0$

10°)Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de courbe (ζg) avec la droite $D_m : y = x-m$ ($m \in R$)

11°)Lorsque D_m coupe (ζg) en deux points distincts ou confondus M' et M'', on appelle I le milieu de [M'M''].
Quel est l'ensemble des points I lorsque m varie .

EXERCICE N°9

Soit a un nombre réel. On dit qu'un polynôme P est factorisable par un polynôme B lorsqu'il existe un polynôme Q tel que : P(x) = B(x).Q(x).

Exemple : Soit $P = x^2-3x+2$ et B(x) = x – 1 .

On a P est factorisable par B car $P(x) = B(x).Q(x)$ *avec* $Q(x) = x - 2$.

1°)Montrer que si P est facorisable par $(x - a)^2$, *alors* $P(a) = P'(a) = 0$.

2°)On suppose que $P(a) = 0$. *et on désigne par f le polynôme tel que :* $P(x) = (x - a).f(x)$.

Montrer que si $P'(a) = 0$ *alors f est factorisable par* $x - a$.

3°)En déduire que les deux propriétés suivantes i et ii sont équivalentes :

- *i)* *Le polynôme P est factorisable par* $(x - a)^2$.
- *ii)* *On a* $P(a) = P'(a) = 0$.

4°)Application 1 : Montrer que $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ *est facorisable par* $(x - 2)^2$.

Résoudre alors l'équation: $P(x) = 0$.