Fiche de cours *$4^{ème}$ économie*

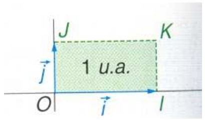
INTEGRALES

MATHS AU LYCEE * ALI AKIR**

Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Notion d'intégrale d'une fonction

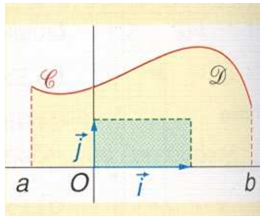
Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$, on définit les points I, Jet K par $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et OIKJ rectangle.
L'aire du rectangle OIKJ définit alors l'unité d'aire (u.a.).



Aire et intégrale d'une fonction positive

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et C sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(x)dx$, égal à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine D délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.

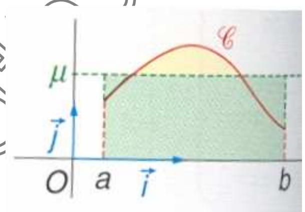


Remarque
a et b sont les bornes de l'intégrale et x est une variable muette :
elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par les lettres t ou u, ainsi : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$

Valeur moyenne

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec a < b. La valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel $\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

La valeur moyenne de f sur [a ; b] est donc le réel μ tel que le rectangle de dimensions μ et b - a soit de même aire que le domaine D délimité par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b



Propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]

- *Soit F une primitive quelconque de f sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$*

Propriétés de l'intégrale

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

Linéarité
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel.
Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (k.f)(x)dx=k\times\int_a^b f(x)dx$$

Intégrales et inégalités

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de , et α, b deux réels appartenant à I.

Si $a \le b$ *et* $f \ge 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.	*Si* $a \le b$ *et* $f \le 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \le 0$.
Si $a \ge b$ *et* $f \ge 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \le 0$.	*Si* $a \ge b$ *et* $f \le 0$ *sur l'intervalle I, alors* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Conservation de l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur [a ; b]. Si $f \le g$ *sur [a ; b], c'est-à-dire si, pour tout réel x de [a ; b],* $f(x) \le g(x)$ *, alors* $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Intégration par parties

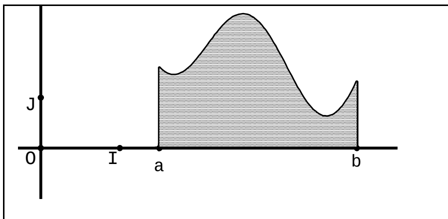
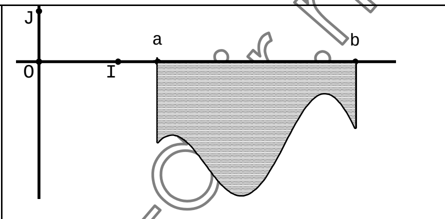
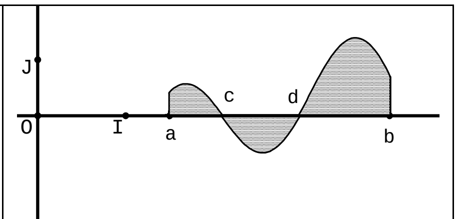
Soit u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\times v'(x)dx$

Aire d'un domaine compris entre deux courbes

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues, a et b deux réels de I tels que $a \le b$.

l'aire en u.a. du domaine limité par les courbes C_f *et* C_g *sur [a, b] est le réel* $\int_a^b |g(t)-f(t)|dt$

		
$A = \int_a^b f(x)dx$	$A = -\int_a^b f(x)dx$	$A = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$