Fiche de cours *3ème informatique*

DERIVABILITES

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR

Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel ℓ *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$

Le réel ℓ *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f en a , il noté* $f'(a)$

(*) Si f est dérivable en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une tangente T d'équation :* $y = f'(a)\ (x-a) + f(a)$

Le vecteur directeur de cette tangente : est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ f'(a)\end{pmatrix}$

Exemple :

Soit $f : x \mapsto x^3$ *. Montrer que f est dérivable en a où a est réel quelconque.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+a^2+ax)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^2+a^2+ax)=3a^2$$

alors f est dérivable en a et on a : $f'(a)=3a^2$

Définition 2

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme :]a-h , a] (h >0)

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un nombre réel ℓ' *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell'$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell'$

Le réel ℓ' *, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a , il noté* $f'_g(a)$*.*

Définition 3

Soit f une fonction dont le domaine de définition contient un intervalle de la forme : [a , h+a[(h>0)

On dit que f est dérivable à droite en x_0 *s'il existe un nombre réel* ℓ'' *tel que :* $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell''$ *ou encore* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell''$

Le réel ℓ''*, lorsqu'il existe, est appelé le nombre dérivé de f à droite en a , il noté* $f'_d(a)$

Conséquences :

1°) f est dérivable en a si et seulement si $f'_g(a)=f'_d(a)$ *nombre fini*

2°)Si f est dérivable à droite de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_d *d'équation :* $T_d : y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x \geq a$

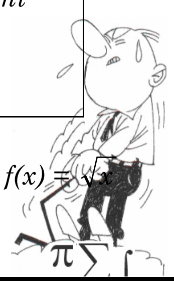
3°)Si f est dérivable à gauche de a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ *une demi tangente* T_g *d'équation :* $T_g : y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$ *et* $x \leq a$

Interprétation graphiques : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ *ou encore* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$

Si :	***Interprétation graphique** :*
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : x = a et y ≥ f(a)*
$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	*alors* C_f *admet en point* $M(a,f(a))$ *un demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : x = a et y ≤ f(a)*

Exemple :

Etudier la dérivabilité de f à droite de point d'abscisse x = 0 et interpréter la résultat tel que : $f(x) = \sqrt{x}$



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

alors la courbe alors C_f admet en point $M(0,0)$ un demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = 0$ et $y \geq 0$

Approximation affine :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

Si f est dérivable en a, alors : $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$

On dit que $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$, pour h voisin de zéro.

Exemple :

Trouver une valeur approchée de $(3.98)^3$

Soit $f : x \mapsto x^3$, $a = 4$ et $h = -0.02$ alors $f(4-0.02) \approx f(4) - \frac{2f'(4)}{100}$ alors $(3.98)^3 \approx 63{,}04$

(le calculatrice donne : 63,044792)

Les nombres dérivés de fonctions usuelles

f	$f'(x)$
$f : x \mapsto \beta$	$f'(x) = 0, \quad x \in R$
$f : x \mapsto \alpha x + \beta$	$f'(x) = x, \quad x \in R$
$f : x \mapsto (x-\alpha)^2 + \beta$	$f'(x) = 2(x-\alpha) \quad x \in R$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha x + \beta}$	$f'(x) = -\dfrac{\alpha}{(\alpha x + \beta)^2}, \quad x \neq -\dfrac{\beta}{\alpha}$
$f : x \mapsto \sqrt{x+\alpha}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\alpha}}, \quad x > -\alpha$
$f : x \mapsto \dfrac{\alpha x + \beta}{\lambda x + \gamma}$	$f'(x) = \dfrac{\alpha\gamma - \lambda\beta}{(\lambda x + \gamma)^2}, \quad x \neq -\dfrac{\gamma}{\lambda}$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables en x :

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$
$(f^k)(x) = kf'(x)f^{k-1}(x), k \in N^*$
$\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{(f(x))^2}, \quad f(x) \neq 0$
$\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(a))^2}, \quad f(x) \neq 0$
$(\sqrt{f})(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad f(x) > 0$