Produit scalaire dans l'espace.

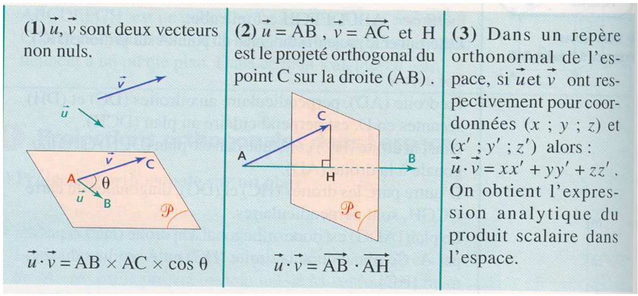
Définition

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs et les point O , M , N tels que* $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *le réel noté* $\vec{u}.\vec{v}$ *et défini comme suit :*

♦*Si* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$.

♦*Si* $\vec{u}\neq\vec{0}$ *et* $\vec{v}\neq\vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(A\hat{O}B)$


(1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = AB \times AC \times \cos\theta$

(2) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$

(3) Dans un repère orthonormal de l'espace, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$. On obtient l'expression analytique du produit scalaire dans l'espace.

Conséquence

1°) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ *où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).*

2°) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

3°) $\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$

Base orthonormée

♦*Une base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dite orthogonale si les vecteurs* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont orthogonaux deux à deux.*

♦*Une base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dite orthonormé si les vecteurs* $\vec{i},\vec{j}$ *et* $\vec{k}$ *sont unitaires et orthogonaux deux à deux.*

♦*Un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthogonale si la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est orthogonale*

♦*Un repère* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est dit orthonormé si la base* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *est orthonormé.*

Norme d'un vecteur

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *repère orthonormé*

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *et* $\vec{u'}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ *alors :* $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Distance de A à P : $d(A,P)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Vecteur normal à un plan

Soit $P : ax+by+cz+d=0$ *avec* $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

On dit que le vecteur $\vec{n}$ *est normal au plan P si la droite* $D(A,\vec{n})\perp P$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *est le vecteur normale à P.*

Position relatives : *Soit* $D(A,\vec{u})$, $D'(A',\vec{u'})$, $P : ax+by+cz+d=0$ *et* $P' : a'x+b'y+c'z+d'=0$

Leur vecteurs normaux $\vec{n}$ *et* $\vec{n'}$

*)$D\perp D'$ *si et seulement si* $\vec{u}\perp\vec{u'}$

*)$D//D'$ *si et seulement si* $\vec{u}//\vec{u'}$

*)$P\perp P'$ *si et seulement si* $\vec{n}\perp\vec{n'}$

*) $P//P'$ *si et seulement si* $\vec{n}//\vec{u}$

*)$P\perp D$ *si et seulement si* $\vec{n}\perp\vec{n'}$

*) $P//D$ *si et seulement si* $\vec{n}\perp\vec{u}$