LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré $a_n x^n$ *et* $b_n x^m$ *respectivement alors*

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple : $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 2x^4 + x - 1}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$

Limites trigonométries

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\tan(ax)}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{x} = 0$$

Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x.\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{x.\sin(x)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

Théorème d'encadrement

Soit f , g et h trois fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} g = l \qquad (l \in R) \end{cases}$ *alors* $\lim_{x_0} h = l$ *(x_0 fini on infini)*

Exemple : $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *. On a :* $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$ *alors pour tout* $x > 0$ *:* $-x \le x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$

Alors on a : $\begin{cases} -x \le x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x \quad \text{pour } x \text{ voisin de } 0 \\ \lim_{0^+}(-x) = \lim_{0^+} x = 0 \end{cases}$ *alors* $\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que :

Si $\begin{cases} f(x) \ge g(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = +\infty \end{cases}$ *alors* $\lim_{x_0} f = +\infty$

Si $\begin{cases} f(x) \le g(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x_0} g = -\infty \end{cases}$ *alors* $\lim_{x_0} f = -\infty$ *(x_0 fini on infini)*

Exemple : *Soit* $f(x) = x^2.(2+\cos(x))$*. Calculer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $2 + \cos x \ge 2 + -1$ *alors* $2 + \cos x \ge 1$ *ainsi* $f(x) \ge x^2$

On a alors $\begin{cases} f(x) \ge x^2 \quad \text{pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{+\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Théorème ; fonction composé

Soit f et g deux fonctions telles que :

$\lim_{x_0} f = y$ *et* $\lim_{y} g = z$ *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = z$ *(x_0 , y et z finis ou infinis)*

Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1+\pi^2 x}{4x}}\right)$ *On peut écrire* $h = g \circ f$ *avec* $f : x \mapsto \frac{1+\pi^2 x}{4x}$ *et* $g \mapsto \sqrt{x}$ *et* $h(x) = \sqrt{\frac{1+\pi^2 x}{4x}}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\pi^2 x}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi^2 x}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$

et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}$ *alors* $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

Soit I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$

Continuité à droites – Continuité à gauche.

**) f est continue en x_0, si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.*

**) Soit f une fonction positive sur I.*

Si f est continue en x_0, alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0,

Si f est continue à droite en x_0, alors $\sqrt{f}$ est continue à droite x_0.

Si f est continue à gauche en x_0, alors $\sqrt{f}$ est continue à gauche x_0.

Continuité sur un intervalle.

**)Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.*

**)Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue $]a,b[$ et continue à gauche de b.*

**) Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue $]a,b[$ et continue à droite de a.*

**) Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue $]a,b[$ et continue à droite de a et à gauche de b.*

Théorème

**)les fonctions polynômes sont continues sur R.*

**)les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition c'est à dire en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.*

**)Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0*

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b], alors pour tout réel c compris entre f (a) et f (b) , l'équation f (x) = c admet aux moins une solution $\alpha \in [a,b]$.

Corollaire 1 de TVI

Si f est continue sur I = [a,b] et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Et si de plus f est strictement monotone sur I alors il existe un unique réel $x_0 \in]a,b[$

tel que $f(x_0) = 0$.

Corollaire 2 de TVI

Si f est continue sur I = [a,b] et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur I

Exemple : *I=[1,2] et $f(x) = x^3 + x - 3$*

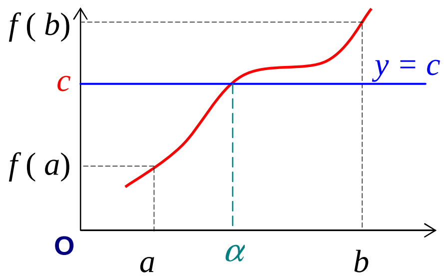
f est dérivable sur I et on a : $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

f(1)=-1 et f(2)=7

Alors on a : f est continue sur I , $f(1) \times f(2) < 0$ et f est strictement croissante sur I

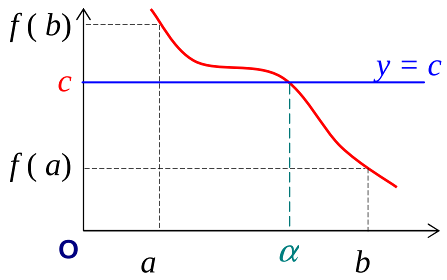
Alors il existe un unique réel $x_0 \in]1,2[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Illustrations graphiques



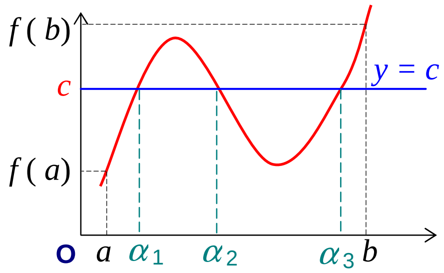
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [a ; b].

L'équation f (x) = c admet une solution unique.



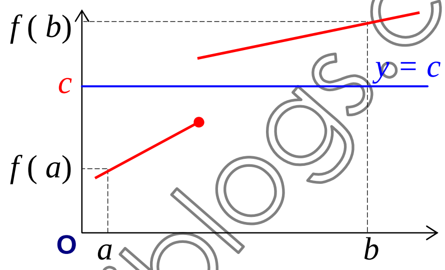
f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [a ; b] .

L'équation f (x) = c admet une solution unique .



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle [a ; b] .

L'équation f (x) = c peut avoir plusieurs solutions



f n'est pas continue sur l'intervalle [a ; b] .

L'équation f (x) = c peut ne pas avoir de solutions.

Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les propriétés suivantes :

(*) la fonction f est une bijection de I sur f(I)

(*)La fonction f^{-1} *est une bijection de f(I) sur I et on a :* $(x \in I \ , y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(I) \ , x = f^{-1}(y))$

(*)La fonction f^{-1} *est strictement monotone sur f(I) et a la même sens de variations que f .*

(*) Les courbes représentatives de f et f^{-1} *, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère (y = x)*

Si est du plus f est continue sur I alors f^{-1} *est continue sur f(I)*

Exemple *:Soit* $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

Montrer que f réalise une bijection de I= $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ *sur un intervalle J qu'on précisera.*

Correction

Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout x de J .*

On a $\forall x \in I : f'(x) = \dfrac{-1}{(2x-1)^2} < 0$ *alors f est strictement décroissante et continue sur I alors f réalise une bijection de I sur J = f(I) =* $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to(-0,5)^+} f(x)\right[= \left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

Pour tout $x \in J$ *:* $y = f^{-1}(x)$ *équivaut à* $x = f(y)$ *et* $y \in I$

équivaut à $x = \dfrac{y+1}{2y+1}$ *et* $y \in \mathrm{I}$ *équivaut à :* $2xy + x = y + 1$ *et* $y \in \mathrm{I}$ *équivaut à* $y = \dfrac{1-x}{2x-1}$ *et* $y \in \mathrm{I}$

alors pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$