Fiche de cours — $3^{ème}$ Maths

PRODUIT SCALAIRE (PLAN)

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : http://maths-akir.midiblogs.com/

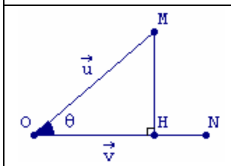
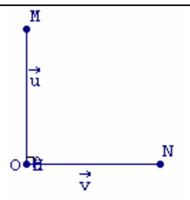
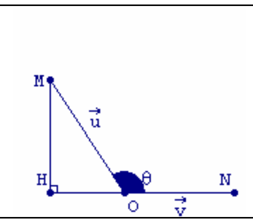
Produit scalaire dans le pan

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan et les point O , M , N tels que* $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *le réel noté* $\vec{u}.\vec{v}$ *et défini comme suit :*

Si $\vec{u} = \vec{0}$ *ou* $\vec{v} = \vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ *et* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *alors* $\vec{u}.\vec{v} = \overline{ON} \times \overline{OH}$ *où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (ON).*

Cas n°1: $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$	Cas n°2: $\theta = \frac{\pi}{2}$	Cas n°3: $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$
		
$\vec{u}.\vec{v} = ON \times OH$	$\vec{u}.\vec{v} = 0$	$\vec{u}.\vec{v} = -ON \times OH$

Conséquence

1)Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$, *on peut remplacer le vecteur* $\overrightarrow{CD}$ *par sa projection orthogonale sur le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *c'est-à-dire :* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$

2) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *trois vecteurs et a et b deux réels.*

$\vec{u}^{\,2} = \left\|\vec{u}\right\|^2$	$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	$(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab(\vec{u}.\vec{v})$
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$		$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 + \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = 2\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$		$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Les différentes expressions du produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \cos(\vec{u},\vec{v})$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$	*Soient* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de composantes respectives (x,y) et (x',y'), on a* $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Inégalité de Schwarz et de Minkowski

Soit $\vec{u}$ *et,* $\vec{v}$ *deux vecteurs.*

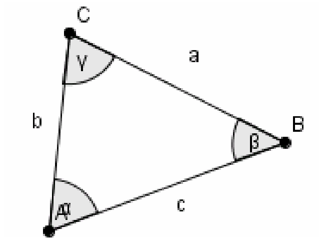
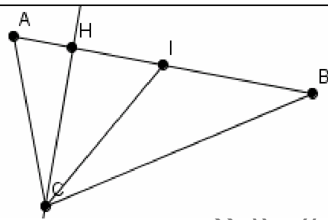
1°) $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \le \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$ *(Inégalité de Schwarz)*

et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires.*

2°) $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \le \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$ *(Inégalité de Minkowski)*

et l'égalité à lieu si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires et du même sens*

Application

L'aire de ABC est égale : $S = \frac{ab}{2}\sin\beta = \frac{bc}{2}\sin\alpha = \frac{ab}{2}\sin\gamma$ ***Formule d'Al-Kashi*** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma$ *Formule de sinus* $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$	
Théorème de médiane *I =A*B et H est le projeté orthogonal de C sur (AB) :* $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$ $CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}$	
Soit ABC triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. On a alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $AH \times BC = AB \times AC$ $AH^2 = HB \times HC$ $AB^2 = AH \times AC$ $AC^2 = CH \times CB$