Définition : (Division euclidienne dans Z)

Etant donnés deux entiers relatifs a et b telle que $b \neq 0$, il existe alors un couple unique relatifs (q , r) tels que :

$a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < |b|$

Question :

Théorème 1 :(Division euclidienne dans Z)

Soient a et b deux entiers relatifs, tels que $|b| > 1$, la division euclidienne de a par b, va donner :

$$a = b \times q + r \text{ avec } 0 \leq r,$$

Montrer que :

$$q = \frac{2a+1-|b|}{2b} + \frac{1}{2b}\sum_{k=1}^{|b|-1}\left(\frac{\sin\frac{k\pi}{b}(1+2a)}{\sin\frac{k\pi}{b}}\right)$$

Et

$$r = \frac{|b|-1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{|b|-1}\left(\frac{\sin\frac{k\pi}{b}(1+2a)}{\sin\frac{k\pi}{b}}\right)$$