Fiche de cours — $3^{ème}$ sciences
CONTINUITE

MATHS AU LYCEE *** ALI AKIR
Site Web : *http://maths-akir.midiblogs.com/*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.

Continuité en un réel.
Définition :

On dit que la fonction f est continue en x_0 si pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $\left(x \in I, et \left|x - x_0 < \alpha\right|\right)$ alors $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \beta$

Conséquences

**)Toutes fonction constante est continue en tout réel x_0.*

**)La fonction affine est continue en tout réel x_0.*

**)Toute fonction polynôme est continue en tout réel x_0.*

**) Toute fonction rationnelle est continue en tout réel x_0 de domaine de définition.*

**)La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel positif x_0.*

**)Si f est continue en x_0, alors $|f|$ est continue x_0.*

**) f une fonction positive sur I.*
Si f est continue en x_0, alors $\sqrt{f}$ est continue x_0.

Opération sur les fonctions continues

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle I

**)Si f et g sont continues en x_0 alors les fonction f+g , fg et kf sont continues en x_0.*

**) Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors les fonction $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.*

Continuité à droites – Continuité à gauche.

**)On dit que la fonction f est continue à droite en x_0 si, pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $(x \in I \text{ et } 0 \le x - x_0 < \alpha)$ alors $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \beta$*

**)On dit que la fonction f est continue à gauche en x_0 si, pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $(x \in I \text{ et } 0 \le x_0 - x < \alpha)$ alors $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \beta$*

**) f est continue en x_0, si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.*

**) f une fonction positive sur I.*
Si f est continue à droite en x_0, alors $\sqrt{f}$ est continue à droite x_0.
Si f est continue à gauche en x_0, alors $\sqrt{f}$ est continue à gauche x_0.

Continuité sur un intervalle.

**)Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.*

**)Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue $]a,b[$ et continue à gauche de b.*

**) Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue $]a,b[$ et continue à droite de a.*

**) Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue $]a,b[$ et continue à droite de a et à gauche de b.*

**)Toute fonction polynôme est continue sur R*
**) Toute fonction rationnelle est continue sur sa domaine de définition.*
Image d'un intervalle
**)L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue sur un intervalle [a,b], alors pour tout réel c compris entre f (a) et f (b) , l'équation f (x) = c admet aux moins une solution $\alpha \in [a,b]$.

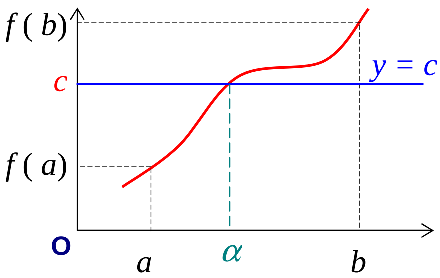
Corollaire 1

Si f est continue sur I = [a,b] et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = 0$.
Et si de plus f est strictement monotone sur I alors il existe un unique réel $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

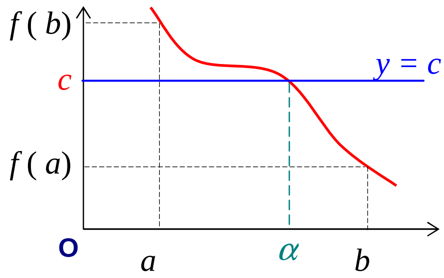
Corollaire 2

Si f est continue sur I = [a,b] et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur I

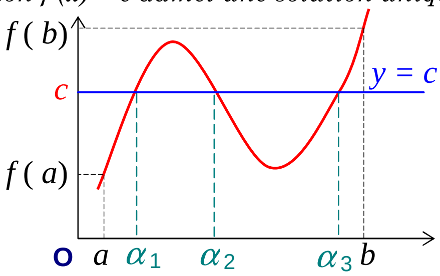
Illustrations graphiques



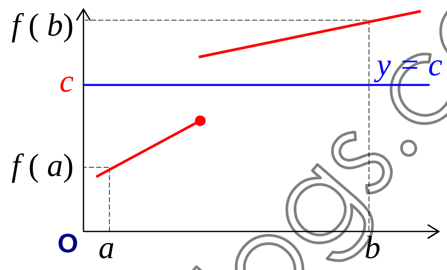
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle [a ; b].
L'équation f (x) = c admet une solution unique.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c admet une solution unique .



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c peut avoir plusieurs solutions



f n'est pas continue sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c peut ne pas avoir de solutions.