Exercice n°01 Calculer les limites suivantes.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-(-1)^n}{3n+(-1)^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)}{n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ $(a,b>0)$

Exercice n°02 ℓ , k et x sont des réels tel que $k\in\,]0,1[$ et $x\in\,]0,1[$.

Soient U et V deux suites réelles

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

1. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(U-V)_n$ est décroissante .
2. Si (U_n) est croissante et convergente, alors elle est majorée.
3. Si (U_n) est majorée et convergente, alors elle est croissante.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{U_n}{1+U_n}=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.
5. Si : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n^2+U_n\times V_n+V_n^2\right)=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$.
6. Si $(U-V)_n$ et $(U+V)_n$ convergent alors (U_n) et (V_n) convergent.
7. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_0+U_1+\dots+U_n\right)=\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$.
8. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_{n+1}-U_n\right)=0$ alors (U_n) est convergent.
9. Si : $U_n\in[0,1]$, $V_n\in[0,1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}U_nV_n=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=1$.

Exercice n°03 Déterminer les limites des sommes suivantes

1. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+k^2}$ (Indication : Montrer que : $0\le S_n\le\dfrac{n}{n^2+1}$).
2. $S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k^2}$ (Indication : Montrer que : $0\le S_n\le\dfrac{n}{(n+1)^2}$).
3. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k}$ (Indication : Montrer que : $\dfrac{n}{n+1}\le S_n\le\dfrac{n^2}{n^2+1}$).
4. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (Indication : Montrer que : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le S_n\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$).
5. $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k!$ (Indication : Montrer que : $S_{2n}\ge(2n)!-(2n-1)!$ et $S_{2n+1}\ge(2n+1)!-(2n)!-1$).

Exercice n°04 Soit la suite (U_n) définie sur N* par : $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$

1. Montrer que pout tout n de N* : $\dfrac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}}\le U_n\le\dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.
2. Montrer que pout tout n de N* : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}-\dfrac{2}{\sqrt{2n+4}}$
3. En déduire que la suite (U_n) est convergente vers $\ell\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

Exercice n°05 On considère la suite U définie par $U_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=U_n\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

1. Montrer que pour tout n de N : $U_n>0$.
2. En déduire que U est convergente .
3. Soit la suite V définie sur N par : $V_n=U_n\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$
   a. Montrer que V est une suite géométrique.

b. En déduire que pour tout n de N : $U_n = \dfrac{1}{2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$

c. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice n°06 On considère la suite U définie par $U_0 = 0$ et $\forall n \in N$: $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 6}{U_n + 2}$

1. Montrer que $U_{n+1} - 2$ et $U_n - 2$ sont de signes contraires.
2. En déduire que pour tout p de N , $U_{2p} \le 2 \le U_{2p+1}$.
3. En déduire que si U est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$.
4. Vérifier que pour tout n de N*, $U_n \ge 1$.
5.
   a. Montrer que pour tout n de N , $\left|U_{n+1} - 2\right| \le \dfrac{1}{3}\left|U_n - 2\right|$
   b. En déduire que pour tout n de N , $\left|U_n - 2\right| \le \dfrac{2}{3^n}$ .Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
6. Soient les suites définie sur N^* par $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} U_{2k}$, $b_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} U_{2k+1}$, $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} U_k$
   a. Montrer que pour tout pour tout k de N* , on a : $2 - \dfrac{2}{9^k} \le U_{2k} \le 2$ et $2 \le U_{2k+1} \le 2 + \dfrac{2}{3\times 9^k}$
   b. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$
   c. Montrer que pour tout pour tout n de N* : $\begin{cases} S_{2n} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - \dfrac{U_{2n+1}}{2n} \\ S_{2n+1} = \dfrac{n(a_n + b_n)}{2n+1} \end{cases}$
   d. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n°07 Soit n un entier naturel non nul . On pose $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

1. Montrer que (U_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout n de N* : $U_{2n} - U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$
3. En déduire que pour tout n de N* : $U_{2n} - U_n \ge \dfrac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice n°08 Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur R par $f_n(x) = x^3 + nx - 1$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique U_n
2. Calculer U_0 et Vérifier que pour tout n de N : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x$.
3. En déduire que la suite (U_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
4. Vérifier que pour tout n de N* : $\dfrac{U_1}{n} \le U_n \le \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$
5. Montrer que pour tout n de N : $\dfrac{n}{n+1} \le \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \le \dfrac{n+3}{n+4}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$
6. Soit pour tout n de N* : $S_n = \dfrac{1}{n}(U_1 + U_2 + ... + U)_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.
   a. Montrer que (S_n) est décroissante.

b. Montrer que pour tout n de N* : $S_{2n} \le \dfrac{S_n + U_n}{2}$

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n°09 On considère la suite U définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in N:\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 2}{U_n + 2}$

1. Montrer que pour tout n de N : $1 \le U_n < \sqrt{2}$.
2. Etudier la monotonie de U.
3. Montrer que U est convergente et calculer sa limite.
4. Montrer que pour tout n de N : $\sqrt{2} - U_{n+1} \le \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - U_n\right)$
5. En déduire que pour tout n de N ; $\sqrt{2} - U_n \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$
6. Soit pour tout n de N* : $S_n = \dfrac{1}{n}\left(U^2{}_0 + U^2{}_1 + ... + U^2{}_n\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} U^2{}_k$.
   a. Montrer que pour tout n de N* : $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left((n+1)U^2{}_{n+1} - \sum\limits_{k=0}^{n+1} U^2{}_k\right)$
   b. En déduire que (S_n) est croissante.
   c. Soit n , $p \in N^*$ tel que n > p. Montrer que : $(n - p + 1)U_p^2 \le nS_n \le (n+1)U_n^2$
   d. Montrer que pour tout n de N* : $S_n \le 4$
   e. En déduire que (S_n) est convergente (on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$)
   f. Montrer que pour tout p de N* : $U_p^2 \le \ell \le 2$. En déduire la valeur de ℓ .

Exercice n°10

1. Soit la fonction f définie sur $[1,3]$ par: $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 2}$

   Montrer que si : $x \in [1,3]$ alors $f(x) \in [1,3]$
2. Soient les deux suites réelles V et W définie par : $V_0 = 1$, $W_0 = 3$ et pour tout n de N , $V_{n+1} = f(V_n)$ et $W_{n+1} = f(W_n)$.
   a. Montrer que pour tout n de N , $V_n \in [1,3]$ et $W_n \in [1,3]$.
   b. Etudier la monotonie de V et W.
   c. Montrer que V et W sont convergentes et calculer leurs limites.
3. On considère la suite U définie par $U_0 = 1,\ U_1 = 3$ et $\forall n \in N:\ U_{n+2} = U_{n+1} + \dfrac{2}{U_{n+1}} - \dfrac{2}{U_n}$
   a. Etabli que pour tout n de N , $U_{n+1} = \dfrac{2}{U_n} + 1$.
   b. Vérifier que pour tout n de N , $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$
   c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice n°11 On considère la suite U définie par $U_0 = 2$ et $\forall n \in N:\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + \dfrac{1}{6 \times 2^n}$

1. Montrer que pour tout n de N : $U_n \ge 0$.
2. Montrer que U est décroissante.
3. En déduire que U est convergente et calculer sa limite.
4. Soit pour tout n de N : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_k$

a. Montrer que pour tout n de N , $S_n = -3U_{n+1} + \frac{1}{2}U_n + \frac{7}{2}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

5. Soit pour tout n de N : $V_n = nU_n$

a. Montrer que pour tout n de N , $V_{2n} \le 2(S_{2n} - S_n)$ et $V_{2n+1} \le V_{2n} + U_{2n}$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

6. Soit pour tout n de N* : $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(U_k - U_{k+1})$

c. Montrer que pour tout n de N* , $T_n = S_n - 2 - nU_{n+1}$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

Exercice n°12

I. Soit (α_n) une suite réelle définie sur N par : $\begin{cases} \alpha_0;\alpha_1 \in R \\ \alpha_{n+2} = \frac{1}{3}\alpha_{n+1} + \frac{1}{3}\alpha_n \end{cases}$

1. On pose $s_n = \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k$ .Montrer que si (α_n) est convergente vers ℓ alors (s_n) converge vers ℓ' qui l'on déterminera.
2. On pose $\beta_n = \alpha_{n+1} + t\alpha_n$. Déterminer les valeurs de t tel que (β_n) soit une suite géométrique.
3. En déduire α_n en fonction de n , α_0 et α_1
4. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

II. Soient a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = a; U_1 = b \\ \forall n \in N \\ U_{n+2} = \sqrt{U_n} + \sqrt{U_{n+1}} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, U_n est bien défini et vérifie $U_n \ge 1$.
2. Montrer que la seule limite possible de la suite (U_n) est 4.
3. On se propose d'établir la convergence de la suite (U_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (V_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $V_n = \frac{1}{2}\sqrt{U_n} - 1$.

a. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n : $V_{n+2} = \frac{V_{n+1} + V_n}{2(2 + V_{n+2})}$.

c. En déduire que : $|V_{n+2}| \le \frac{1}{3}(|V_{n+1}| + |V_n|)$

4. On note (α_n) la suite définie par : $\alpha_0 = |V_0|$, $\alpha_1 = |V_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$\alpha_{n+2} = \frac{1}{3}\alpha_{n+1} + \frac{1}{3}\alpha_n$ .Montrer que pour tout entier naturel n, $|V_n| \le \alpha_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (U_n).

Exercice n°13 Soit a un réel strictement positif.

On considère la suite U définie sur N* par $U_1 \in \left]0, \frac{a}{2}\right[$ et: $U_{n+1} = U_n - \frac{U^2{}_n}{a}$

1. Montrer que pour tout n de N* : $0 < U_n < \frac{a}{2}$.
2. Montrer que U est décroissante.
3. En déduire que U est convergente et calculer sa limite.
4. Soit pour tout n de N* : $V_n = nU_n$
   a. Montrer que pour tout n de N* : $V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{a}{n+1} - U_n\right)U_n$
   b. Montrer que pour tout n de N* : $0 < U_n < \frac{a}{n+1}$
   c. En déduire que V est convergente et calculer sa limite $\ell \in]0,a]$.
5. Soient pour tout n de N* : $W_n = \frac{1}{a - U_n}$ et $H_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$
   a. Montrer que W est croissante .
   b. Vérifier que pour tout n de N* : $W_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n}$
   c. En déduire que $H_n = \frac{n+1}{nV_{n+1}} - \frac{1}{nU_1}$
   d. Vérifier alors que $\lim_{n\to+\infty} H_n = \frac{1}{\ell}$
   e. Montrer que pour tout n de N* : $2H_{2n} - H_n \le W_{2n}$
   f. En déduire que : $\ell = a$

Exercice n°14

On considère la suite réelle (α_n) définie sur N par $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{1+\alpha_n{}^2}}{\alpha_n} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout n de N : $0 < \alpha_n \le 1$.
2. Montrer que pour tout n de N : $\alpha_{n+1} \le \frac{\alpha_n}{2}$. En déduire que la suite (α_n) est décroissante.
3. Montrer que (α_n) est convergente vers 0.
4. Pour tout n entier naturel, on pose : $W_n = \frac{2^{n+3}\alpha_{n+1}}{1+\alpha^2{}_{n+1}}$ et $V_n = 2^{n+2}\alpha_n$.
   g. Montrer que pour tout n de N : $\alpha_n = \frac{2\alpha_{n+1}}{1-\alpha^2{}_{n+1}}$.
   h. Montrer que pour tout n de N : $V_n - W_n = \frac{2^{n+4}\alpha^3{}_{n+1}}{1-\alpha^4{}_{n+1}}$.
   i. En déduire que pour tout n de N : $0 < V_n - W_n < \frac{2}{4^n}$.
   j. Montrer que (V_n) est décroissante et que (W_n) est croissante.
   k. En déduire que (V_n) et (W_n) sont adjacentes.
5.
   a. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$: $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.
   b. En déduire que pour tout n de N : $\alpha_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$
   c. En déduire la limite commune des suites (V_n) et (W_n)

5

Exercice n°15

I. Soit la suite (U_n) définie sur N* par : $U_n = \frac{n}{a^n}$ où a est un réel strictement supérieur 2.

1. Vérifier que pour tout n de N : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \le \frac{2}{a}$. En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (U_n) est convergente vers 0.
3. Soit pour tout n de N* : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$. Montrer que pour tout n de N* : $S_n \le \frac{1}{a-2}$
4. Montrer que pour tout n de N* : $S_{n+1} = \frac{1}{a}S_n + \frac{1}{a-1} - \frac{1}{(a-1)a^{n+1}}$
5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{(a-1)^2}$

II. Soit la suite (W_n) définie sur N* par : $W_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k U_k$

1. Montrer que la suite (W_{2n}) est strictement décroissante et la suite (W_{2n+1}) est strictement croissante.
2. Etablir que pour tout n de N* : $W_{2n+1} < W_{2n}$
3. Montrer que les suites (W_{2n}) et (W_{2n+1}) sont convergentes vers le même limite ℓ_a tel que : $\frac{-a^2+2a-3}{a^3} < \ell_a < \frac{-a+2}{a^2}$

Exercice n°16 Soient les deux réels a et b, tels que $0 < a < b$, et les deux suites $(U_n)_{n\in N}$ et $(V_n)_{n\in N}$ définies par : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{U_nV_n(U_n+V_n)}{U_n^2+V_n^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = b \\ V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n de N, $V_n > U_n$.
2. Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
3. Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.
4. Déduire que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.
5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in N}$ définie par son terme général $W_n = \frac{1}{U_n} + \frac{1}{V_n}$ est constante.
6. Déduire la valeur des limites des suites (U_n) et (V_n) en fonction de a et b .

Exercice n°17 On définit Les suites (U_n) et (V_n) par : $U_0 \ge V_0 > 0$ et pour tout n de N :
$U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}$ et $\frac{1}{V_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_n} + \frac{1}{V_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout n de N : $U_n \ge V_n$ et $U_{n+1} - V_{n+1} \le \frac{1}{2}(U_n - V_n)$
2. Montrer que (U_n) est décroissante et (V_n) est croissante.
3. En déduire que (U_n) et (V_n) sont convergentes et ont même limite.

Exercice n°18 Soient les deux réels a et b, tels que $0 < a < b$, et les deux suites $(U_n)_{n\in N}$ et $(V_n)_{n\in N}$ définies par : $\begin{cases} U_0 = a \quad , \quad V_0 = b \\ U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \quad , \quad V_{n+1} = \sqrt{\frac{V_n(U_n+V_n)}{2}} \end{cases}$

1. Montrer que (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite $\ell > 0$.
2. On suppose que $a = b\cos\varphi$ où $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer ℓ en fonction de b et φ